Innleveringsoppgaver

Oppgave 4, Eksamen 2013 Anta at endringen i temperatur T i et vekstkammer (målt i Fahrenheit) over en 12-timers periode er gitt ved ligningen

$$\frac{d}{dt}T(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

for $0 \leq t \leq 12$. Temperaturen ved tid $t = 0$ er $T(0) = 45$. Hva er temperaturen etter 3 timer?

Løsning:
Vi finner de anti-deriverte til $\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$:

$$\begin{aligned} T(t) &= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + C. \end{aligned}$$

Vi bruker initialbetingelsen og finner at

$$45 = T(0) = \frac{6}{\pi}\sin(0) + C = C.$$

Dermed er $T(t) = \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 45$ og

$$\begin{aligned} T(3) &= \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}3\right) + 45 \\ &= \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 45 \\ &= \frac{6}{\pi} + 45. \end{aligned}$$

Oppgave 3, Eksamen 2015 Finn alle anti-deriverte av

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \qquad x > 0.$$

Løsning:
Funksjonen f er på formen $f(x) = cx^r$ der $c = 1/\sqrt{2}$ og $r = -1/2$. Dermed er alle anti-deriverte gitt ved

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= c\int x^r\,\mathrm{d}x \\
&= c\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{-1/2+1}x^{-1/2+1} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1/2}x^{1/2} + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}x^{1/2} + C \\
&= \sqrt{2}\sqrt{x} + C \\
&= \sqrt{2x} + C.
\end{aligned}$$

3 Finn alle anti-deriverte av

$$f(x) = \frac{3}{x} + \sin(3x) + \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} + x^3 + 3^x.$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{3}{x} + \sin(3x) + \frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x} + x^3 + 3^x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \left(3x^{-1} + \sin(3x) + x^{-3} + x^{3/2} + e^{\ln(3)x}\right)\mathrm{d}x \\
&= 3\ln x - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + \frac{1}{3/2+1}x^{3/2+1} + \frac{1}{\ln 3}e^{\ln(3)x} + C \\
&= 3\ln x - \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{\ln 3}3^x + C.
\end{aligned}$$

4 Finn alle anti-deriverte av

$$f(x) = \frac{1}{1/4 + x^2}.$$

Hint: arctan!

Løsning:
Vi vet at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Nå er

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1/4 + x^2} \\ &= \frac{4}{1 + 4x^2} \\ &= \frac{4}{1 + (2x)^2}. \end{aligned}$$

Substitusjonen $t := 2x$ gir $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$, så

$$\begin{aligned} \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{4}{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int \frac{1}{1 + (2x)^2} 2\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int \frac{1}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\arctan t + C \\ &= 2\arctan(2x) + C. \end{aligned}$$

Anbefalte øvingsoppgaver

Fra Avsnitt 5.8 (side 272–273) i *Calculus for Biology and Medicine*, 3. utgave av Claudia Neuhauser.

- 1, 3, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29, 37.
- 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71.

OBS: Disse oppgavene skal *ikke* leveres inn!