EKSAMEN MA0001 HØST 2016 — LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1. Vi skal derivere $f(x) = (x-1)e^x$. Bruker produktregel $(uv)' = uv' + u'v$ med $u(x) = (x-1)$ og $v(x) = e^x$. Da er $u'(x) = 1$ og $v'(x) = e^x$.

$$f'(x) = (x-1)e^x + 1 \cdot e^x = xe^x - e^x + e^x = xe^x.$$

Oppgave 2. Vi skal derivere $f(x) = \ln(2+x^2)$. Vi vet at $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$ og bruker kjerneregel med $(2+x^2)' = 2x$.

$$f'(x) = \frac{1}{2+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{2+x^2}.$$

Oppgave 3. Vi ser på funksjonen $f(x) = x - \sin(x)$ som har en invers g. Det betyr at dersom $y = f(x)$ er $x = g(y)$. Vi regner

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \pi - \sin(\pi) = \pi - 0 = \pi, \\ f'(x) &= 1 - \cos(x), \\ f'(\pi) &= 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2. \end{aligned}$$

Siden $y = f(x)$ for $x = \pi$ og $y = \pi$ er også $x = g(y)$, så $g(\pi) = \pi$. For å finne $g'(\pi)$ bruker vi formelen

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Vi har igjen at $x = y = \pi$, som gir at

$$g'(\pi) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 4. Vi bruker L'Hôpitals regel for å regne ut grenseverdien:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{2x+2} = \frac{e}{4}.$$

Oppgave 5. Vi ser på polynomet $f(x) = -1 + x - 3x^2 + 2x^3$, som kontinuerlig og deriverbar for alle tall x.

(a) Siden f er kontinuerlig, $f(1) = -1$ og $f(2) = 5$ vet vi fra skjæringssetningen at det for hvert tall y mellom -1 og 5 finnes minst ett tall x mellom 1 og 2 slik at $f(x) = y$. Spesielt gjelder dette for $y = 0$, siden $-1 < 0 < 5$.

(b) Vi skal bruke Newtons metode med startverdi $x_0 = 1.5$ og $n = 2$ steg for å finne en tilnærmet verdi for løsningen av ligningen $f(x) = 0$. Newtons metode er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Vi regner ut $f'(x) = 1 - 6x + 6x^2$. Da får vi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-1 + x_n - 3x_n^2 + 2x_n^3}{1 - 6x_n + 6x_n^2}.$$

Setter inn $x_0 = 1.5$ for å regne ut x_1, og så x_1 for å regne ut x_2:

$$x_1 = x_0 - \frac{-1 + x_0 - 3 \cdot x_0^2 + 2 \cdot x_0^3}{1 - 6 \cdot x_0 + 6 \cdot x_0^2} = \frac{31}{22} \approx 1.4091$$

$$x_2 = x_1 - \frac{-1 + x_1 - 3 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_1^3}{1 - 6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_1^2} = \frac{33193}{23738} \approx 1.3983$$

Oppgave 6. Vi skal finne andre grads Taylor-polynom for $f(x) = \sqrt{1+x}$ om $x = 3$. Formelen er

$$P_2(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2.$$

Vi må altså regne ut $f(3)$, $f'(3)$ og $f''(3)$. Vi skriver om og deriverer:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{1/2}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{1/2-1} = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-1/2-1} = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Så setter vi inn $x = 3$ og får

$$f(3) = 2 \qquad f'(3) = \frac{1}{4} \qquad f''(3) = -\frac{1}{32}.$$

Altså blir

$$P_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{64}(x-3)^2.$$

Oppgave 7. Vi vil finne alle anti-deriverte til funksjonen $f(x) = \sqrt{3x}$ når $x > 0$. Vi skriver det som et ubestemt integral og regner:

$$\int \sqrt{3x}\,dx = \int \sqrt{3} \cdot \sqrt{x}\,dx = \sqrt{3} \int x^{1/2}\,dx = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{1/2+1} x^{1/2+1} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2} + C.$$

Oppgave 8. Vi ser på $f(x) = 1/(1+x+x^2)$ og lar M_n betegne estimatet fra midtpunktsregelen med n delintervaller for integralet

$$\int_0^3 f(x)\,dx.$$

(a) For å regne ut M_3 deler vi $[0,3]$ opp i de tre intervallene $[0,1]$, $[1,2]$ og $[2,3]$. Midtpunktene er $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.5$ og $x_3 = 2.5$. Vi får da at

$$M_3 = \frac{b-a}{3}\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) = \frac{3-0}{3}\left(\frac{4}{7} + \frac{4}{19} + \frac{4}{39}\right) = \frac{4588}{5187} \approx 0.8845.$$

(b) Vi skal finne et heltall n slik at

$$\left| \int_0^3 f(x)\,dx - M_n \right| \leq \frac{1}{256}.$$

Vi bruker formelen

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - M_n \right| \leq K \frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

der $|f''(x)| \leq K$ for alle x mellom a og b. Vi har $a = 0$ og $b = 3$. Det er også oppgitt at $0 \leq f''(x) \leq 8/9$ på intervallet $[0, 3]$ så vi kan ta $K = 8/9$. Vi setter inn verdiene

$$K\frac{(b-a)^3}{24n^2} = \frac{8}{9}\,\frac{(3-0)^3}{24n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Altså må vi løse ulikheten

$$K\frac{(b-a)^3}{24n^2} \leq \frac{1}{256} \iff \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{256} \iff 256 \leq n^2 \iff 16 \leq n.$$

Vi kan bruke $n = 16$.

Oppgave 9. Vi bruker at $\sin(x)$ er en anti-derivert av $\cos(x)$ og at $-\cos(x)$ en anti-derivert av $\sin(x)$, for å regne ut integralet

$$\int_0^\pi \cos(x) + \sin(x)\,dx = \big[\sin(x) - \cos(x)\big]_0^\pi = \big(\sin(\pi) - \cos(\pi)\big) - \big(\sin(0) - \cos(0)\big) = 2.$$

Gjennomsnittsverdien til en kontinuerlig funksjon f på et intervall $[a, b]$ er gitt ved

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

I dette tilfellet blir altså gjennomsnittsverdien

$$\frac{1}{\pi - 0}\int_0^\pi \cos(x) + \sin(x)\,dx = \frac{2}{\pi}.$$

Oppgave 10. Vi vil finne det reelle tallet a slik at

$$\int_a^\infty e^{-3x}\,dx = \frac{1}{6}.$$

Vi begynner med å regne ut det uekte integralet

$$\int_a^\infty e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-3}e^{-3x}\right]_a^b = \frac{1}{3}\left(e^{-3a} - \lim_{b\to\infty} e^{-3b}\right) = \frac{e^{-3a}}{3}.$$

Altså må tallet a oppfylle ligningen

$$\frac{e^{-3a}}{3} = \frac{1}{6} \iff e^{-3a} = \frac{1}{2} \iff 2 = e^{3a} \iff \ln(2) = 3a \iff \frac{\ln(2)}{3} = a.$$