MA0001: KOMPLETTERE KVADRATER

Gitt tre reelle tall a, b og c vil vi finne reelle tall d og e slik at

$$ax^2 + bx + c = a(x+d)^2 + e \tag{1}$$

for alle reelle tall x. For mange vil det være lettere å bruke en formel fremfor metoden jeg gjennomgikk i forelesningen. Her er formelen:

$$\begin{aligned} d &= \frac{b}{2a}, \\ e &= c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Bevis for formelen. Ved å utvide $(x+d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$ i (1), finner vi at

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2adx + ad^2 + e.$$

Vi ser at leddene med x^2 stemmer. Så ser vi på leddene med x,

$$bx = 2adx$$

som betyr at $d = b/(2a)$. Så ser vi på konstantleddet, og får at

$$c = ad^2 + e,$$

og siden vi at $d = b/(2a)$, så konkluderer vi at $e = c - b^2/(4a)$. □

Her er eksempelet fra forelesningen.

Eksempel. Kompletter kvadratet $2x^2 + 2x + 1$.

Vi har $a = 2$, $b = 2$ og $c = 1$. Vi får da at

$$\begin{aligned} d &= \frac{b}{2a} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \\ e &= c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{2^2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Altså får vi

$$2x^2 + 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

Formelen for d og e gitt over er starten på beviset til abc-formelen for løsningen til ligningen $ax^2 + bx + c = 0$. Det er nemlig betraktelig lettere å løse

$$a(x+d)^2 + e = 0.$$

Kan du fullføre beviset for abc-formelen?