NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA0001 Brukerkurs i matematikk A. LØSNINGSFORSLAG

Faglig kontakt under eksamen: John Erik Fornæss

Tlf: 46419414

Eksamensdato: 8. desember 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte eller håndskrevne hjelpemidler, samt kalkulatorer

Annen informasjon:
LØSNINGSFORSLAG.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

Finn den deriverte av

$$f(x) = x \sin x.$$

Løsning Oppgave 1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \sin x)' \\ &= \sin x + x \cos x \end{aligned}$$

Oppgave 2 Finn den deriverte av

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}, x > 0.$$

Løsning Oppgave 2

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x}} \\ &= (2x)^{-1/2} \\ &= \frac{-1}{2}(2x)^{-1/2-1} \cdot 2 \\ &= -(2x)^{-3/2} \\ &= \frac{-1}{(2x)^{3/2}} \end{aligned}$$

Oppgave 3 Finn alle antideriverte av

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}, x > 0.$$

Løsning Oppgave 3

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{2x}}dx &= \int (2x)^{-1/2}dx \\
&= (2x)^{-1/2+1} + C \\
&= \sqrt{2x} + C
\end{aligned}$$

Oppgave 4 Finn

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x}{2x}.$$

Dette er et $\frac{0}{0}$ uttrykk så vi bruker L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 1}{2} = 1$$

Oppgave 5

Finn

$$\lim_{x\to 0} x \ln x.$$

Løsning Oppgave 5

Dette er et $0 \cdot \infty$ uttrykk. Vi gjør det om til $\frac{\infty}{\infty}$ og bruker L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x \ln x &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0}(-x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Oppgave 6

Vis at funksjonen $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1}, & x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$ er kontinuerlig i $x = 1$.

Løsning Oppgave 6

Vi trenger å vise at

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

Uttrykket er 0/0 så vi bruker L'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Oppgave 7 Kurvene $y = x$ og $y = x^2$ skjærer hverandre i to punkter med $x = a, x = b$. Hvor stort er arealet mellom de to kurvene $y = x$ og $y = x^2$ og med $a \leq x \leq b$.

Løsning Oppgave 7

Kurvene skjærer hverandre når $x = 0$ og $x = 1$. Så $a = 0$ og $b = 1$. Siden $x > x^2$ når $0 < x < 1$ så blir arealet

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - x^2)dx &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} l_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Oppgave 8 Vi roterer arealet mellom x aksen, kurva $y = x$ og linjene $x = 1, x = 2$ om $x-$aksen. Finn volumet av dette omdreiningslegemet.

Løsning Oppgave 8

Volumet blir

$$\begin{aligned}\int_1^2 \pi x^2 dx &= \frac{\pi}{3} x^3 l_1^2 \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot 8 - \frac{\pi}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{7\pi}{3}\end{aligned}$$

Oppgave 9

En funksjon $f(x)$ har en invers $g(x)$. Anta at $f(0) = 1, f(1) = 0, f'(0) = -1, f'(1) = -2$. Finn $g'(0)$ og $g'(1)$.

Løsning Oppgave 9

Vi benytter regelen at den deriverte av en invers funksjon er en over den deriverte av funksjonen. Siden $f(1) = 0$ så blir

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

og siden $f(0) = 1$ så blir

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Oppgave 10 Finn Taylorpolynomet av grad 2 om $x = 0$ til funksjonen $f(x) = 2\cos x$.

Løsning Oppgave 10

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f'(x) &= -2\sin x \\ f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -2\cos x \\ f''(0) &= -2 \end{aligned}$$

Derfor blir Taylorpolynomet

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 2 - x^2$$