MA0001 Brukerkurs i matematikk A
Høst 2014

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 9

4.5:15 Derivér

$$f(x) = 3\sin(x^2).$$

Løsning:
Vi bruker kjerneregelen og finner at

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos(x^2)2x \\ &= 6x\cos(x^2). \end{aligned}$$

4.5:25 Derivér

$$f(x) = 2\tan(1-x^2).$$

Løsning:
Vi bruker kjerneregelen og finner at

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{-2x}{\cos^2(1-x^2)} \\ &= -\frac{4x}{\cos^2(1-x^2)}. \end{aligned}$$

4.6:19 Derivér

$$f(x) = e^{\sin(x^2-1)}.$$

Løsning:
Vi bruker kjerneregelen (to ganger) og finner at

$$f'(x) = e^{\sin(x^2-1)}\cos(x^2-1)2x.$$

4.6:60 Anta at en populasjonsstørrelse ved tiden t er gitt ved

$$N(t) = N_0 e^{rt}, \qquad N_0 > 0,\ r \in \mathbb{R}.$$

a) Hva er populasjonsstørrelsen ved tiden 0?

b) Vis at

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN.$$

Løsning: a)

$$N(0) = N_0 e^0 = N_0.$$

Løsning: b)

$$\begin{aligned} N'(t) &= N_0 e^{rt} r \\ &= rN_0 e^{rt} \\ &= rN(t). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{4.7:5}}$ Finn inversen til

$$f(x) = 3 - 2x^3$$

og finn den deriverte av inversen, først direkte og så ved å bruke at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{0.1}$$

Løsning:
Vi har at f er 1-1 ved horisontal-linje-testen, så f^{-1} eksisterer. La $y = f^{-1}(x)$. Da er

$$\begin{aligned} x &= f(y) = 3 - 2y^3 \\ &\Rightarrow \\ y^3 &= \frac{3-x}{2} \\ &\Rightarrow \\ f^{-1}(x) = y &= \left(\frac{3-x}{2}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

og den deriverte er

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{3-x}{2}\right)^{1/3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{3-x}{2}\right)^{-2/3} (-1/2) \\ &= -\frac{1}{6} \left(\frac{2}{3-x}\right)^{2/3}. \end{aligned}$$

Vi bruker formelen (0.1): $f'(x) = -6x^2$, så

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{-6(f^{-1}(x))^2} \\
&= \frac{1}{-6\left(\left(\frac{3-x}{2}\right)^{1/3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{-6\left(\frac{3-x}{2}\right)^{2/3}} \\
&= -\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3-x}\right)^{2/3}.
\end{aligned}$$

Ok.

$\boxed{\text{4.7:9}}$ La

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

Finn

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x)\right|_{x=2}.$$

Hint: $f(3) = 2$.

Løsning:
Fordelen med (0.1) er at man kan regne ut verdien til den deriverte av inversen i enkelte punkter uten å ha et eksplisitt uttrykk for inversen. Fra hintet vet vi at $f^{-1}(2) = 3$ og $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $f'(3) = \frac{1}{4}$, så

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x)\right|_{x=2} &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} \\
&= \frac{1}{f'(3)} \\
&= \frac{1}{1/4} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{4.8:1}}$ Finn en tilnærming til tallet $\sqrt{65}$.

Løsning:

La $f(x) = \sqrt{x}$. Vi vet at $f(64) = 8$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og for x *nær* 64 er

$$\begin{aligned} f(x) &\approx L(x) \\ &= f(64) + f'(64)(x-64) \\ &= \sqrt{64} + \frac{1}{2\sqrt{64}}(x-64) \\ &= 8 + \frac{x-64}{16}. \end{aligned}$$

Dvs at

$$\sqrt{65} = f(65) \approx L(65) = 8 + \frac{1}{16} = 8.0625.$$

Ved bruk av kalkulator finner vi at feilen er veldig liten:

$$f(65) - L(65) = -0.000242...$$

I prosent blir dette

$$100\% \frac{|f(65) - L(65)|}{|f(65)|} = 0.003\%.$$

$\boxed{\text{4.8:9}}$ Finn en tilnærming til tallet $\ln(1.01)$.

Løsning:
La $f(x) = \ln x$. Vi vet at $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ og for x nær 1 er

$$\begin{aligned} f(x) &\approx L(x) \\ &= f(1) + f'(1)(x-1) \\ &= 0 + \frac{1}{1}(x-1) \\ &= x - 1. \end{aligned}$$

Dvs at

$$\ln(1.01) = f(1.01) \approx L(1.01) = 0.01,$$

og feilen er igjen veldig liten:

$$f(1.01) - L(1.01) = -0.0000497...$$

eller i prosent:

$$100\% \frac{|f(1.01) - L(1.01)|}{|f(1.01)|} = 0.5\%.$$