NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA0001 Brukerkurs i matematikk A. LØSNINGSFORSLAG

Faglig kontakt under eksamen: John Erik Fornæss

Tlf: 46419414

Eksamensdato: KONTE VÅR 2015

Eksamenstid (fra–til): a-b

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt samt, kalkulatorer tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Løs ligningen

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 2\tan x, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

LF oppgave 1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 x} &= 2\tan x \\
\frac{1}{\cos^2 x} &= 2\frac{\sin x}{\cos x} \\
\frac{1}{\cos x} &= 2\sin x \\
1 &= 2\sin x\cos x \\
1 &= \sin 2x \\
2x &= \pi/2 \\
x &= \pi/4
\end{aligned}$$

Oppgave 2 Finn $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}{x^4}$.

LF oppgave 2

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\frac{x^2}{2}-1}{x^4} &= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H}= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+x}{4x^3} \\
&= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H}= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+1}{12x^2} \\
&= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H}= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{24x} \\
&= [\frac{0}{0}] \\
&=_{L'H}= \lim_{x\to 0}\frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Oppgave 3 Vis at det fins nøyaktig én x slik at $x^7+x^3-7=0$.

LF oppgave 3

$f(x)=x^7+x^3-7$. Da vil f gå mot ∞ når x går mot ∞. I tillegg vil f gå mot $-\infty$ når x går mot $-\infty$. Da følger det av skjæringssatsen at f må ha minst ett nullpunkt. $f'(x)=7x^6+3x^2>0$ unntatt i $x=0$. Det betyr at f er strengt voksende. Derfor har f bare ett nullpunkt.

Oppgave 4 Finn asymptotene til $f(x)=\frac{x^2+x}{x-1}$.

LF oppgave 4

f har en vertial asymptote i $x=1$. Vi deler ut:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+x}{x-1} \\
&= \frac{x^2-x+2x}{x-1} \\
&= \frac{x(x-1)+2(x-1+1)}{x-1} \\
&= \frac{x(x-1)}{x-1}+\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{2}{x-1} \\
&= x+2+\frac{2}{x-1} \\
&\Rightarrow \\
\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-(x+2) &= 0
\end{aligned}$$

$y = x+2$ er derfor skråasymptote til f når $x \to \pm\infty$.

Oppgave 5 Volumet V av en ballong med radius r er $\frac{4\pi r^3}{3}$. Vi fyller en ballong med luft, med en rate på 10 cubikk centimeter per sekund. Hvor fort øker radien når radien ar 5 cm?

LF oppgave 5

$V(t) = \frac{4\pi r(t)^3}{3}$, så $V'(t) = 4\pi r^2(t)r'(t)$.

$10 = 4\pi(5)^2 * r'(t)$

$r'(t) = \frac{10}{4\pi * 25} = \frac{1}{10\pi}$.

Oppgave 6 En gruppe $P(t)$ med skadedyr avtar proporsjonalt med gruppens størrelse, slik at $P'(t) = kP(t)$. Anta at $P(0) = 1.000.000$ og at $P(1) = 500.000$. Hvor lang tid tar det før gruppen er ned på 100?

LF oppgave 6

$P(t) = P(0)e^{kt}$.

$500.000 = 1.000.000e^k$,

$e^k = \frac{1}{2}$.

Vi finner når $P(t) = 100$.

$$1.000.000e^{kt} = 100, 1.000.000(1/2)^t = 100, 2^t = 10.000, t = \frac{\ln 10.000}{\ln 2} = 13.3.$$

Oppgave 7

a) Finn arealet mellom kurvene $y = x^2 + 1$ og $y = 16 - 2x$ i første kvadrant.

b) Vis at

$$1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2$$

c) Finn lengden av kurven $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}, 1 \leq x \leq 2$.

LF oppgave 7

a) Vi beregner skjæringspunktet:

$x^2 + 1 = 16 - 2x$, så $x^2 + 2x = 15$. Det gir $x = 3, x = -5$. Grafen til $y = 16 - 2x$ ligger over grafen til $y = x^2 + 1$ for $0 < x < 3$.

Arealet mellom kurvene er

$$\int_0^3 (16 - 2x) - (x^2 + 1)dx = 16x - x^2 - \frac{x^3}{3} - x|_0^3 = 48 - 9 - 9 - 3 = 27.$$

b)

$$\begin{aligned} 1 + (x - \frac{1}{4x})^2 &= 1 + x^2 - \frac{1}{2} + (\frac{1}{4x})^2 \\ &= x^2 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4x})^2 \\ &= (x + \frac{1}{4x})^2 \end{aligned}$$

c) Lengen er gitt av integralet

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{1+|(\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4})'|^2}dx &= \int_1^2 \sqrt{1+|x-\frac{1}{4x}|^2}dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{1+x^2-\frac{1}{2}+(\frac{1}{4x})^2}dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{x^2+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4x})^2}dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{(x+\frac{1}{4x})^2}dx \\
&= \int_1^2 x+\frac{1}{4x}dx \\
&= \frac{x^2}{2}+\frac{\ln x}{4}|_1^2 \\
&= \frac{2^2}{2}+\frac{\ln 2}{4}-(\frac{1^2}{2}+\frac{\ln 1}{4}) \\
&= 2+\frac{\ln 2}{4}-\frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2}+\frac{\ln 2}{4}
\end{aligned}
$$

Oppgave 8 Finn tredje grads Taylorpolynomet P_3 om $x=-1$ til funksjonen $f(x)=x^4+e^{-x}$.

LF oppgave 8

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 + e^{-x} \\
f'(x) &= 4x^3 - e^{-x} \\
f''(x) &= 12x^2 + e^{-x} \\
f'''(x) &= 24x - e^{-x} \\
f(-1) &= 1 + e \\
f'(-1) &= -4 - e \\
f''(-1) &= 12 + e \\
f'''(-1) &= -24 - e \\
P_3(x) &= f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) + \frac{f''(-1)}{2}(x-(-1))^2 + \frac{f'''(-1)}{6}(x-(-1))^3 \\
&= (1+e) + (-4-e)(x+1) + \frac{12+e}{2}(x+1)^2 + \frac{-24-e}{6}(x+1)^3
\end{aligned}
$$