NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA0001 Brukerkurs i matematikk A. LØSNINGSFORSLAG

Faglig kontakt under eksamen: John Erik Fornæss

Tlf: 46419414

Eksamensdato: 9. desember 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt, samt kalkulatorer.

Annen informasjon:
Svar på oppgavene skrives på oppgavearkene.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Kandidatnummer: ....

Oppgave 1 Løs ligningen

$$2(e^x)^2 - e^{2x} = 2e^x - 1.$$

LF oppgave 1

$$\begin{aligned}
2(e^x)^2 - e^{2x} &= 2e^x - 1 \\
&\Rightarrow \\
2(e^x)^2 - (e^x)^2 &= 2e^x - 1 \\
&\Rightarrow \\
(e^x)^2 - 2e^x + 1 &= 0 \\
(e^x - 1)^2 &= 0 \\
e^x &= 1 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Oppgave 2 Finn $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2 + 3x} - 2x$.

LF oppgave 2

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+3x}-2x &= [\infty-\infty] \\
&= \lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+3x}-2x)\frac{\sqrt{4x^2+3x}+2x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2x\sqrt{1+\frac{3}{4x}}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2\sqrt{1+\frac{3}{4x}}+2} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3 Vis at det fins en x slik at $x^5 - 3x^3 = 1$.

LF oppgave 3

Funksjonen $x^5 - 3x^3 - 1$ har grense ∞ når x går mot ∞ og har grense $-\infty$ når x går mot $-\infty$. Det følger av skjæringsatsen at funskjonen må ha et nullpunkt.

Oppgave 4 Skisser grafen til $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

LF oppgave 4
Oppgaven ber om en skisse av grafen. Det er ingen krav stilt om fremgangsmåte. Vi foreslår en mulighet for å kunne skissere grafen.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$. f avtar når $-1 < x < 1$ og vokser når $x > 1$ og når $x < -1$. Den har derfor maks punkt i $x = -1, y = 3$ og minimum i $x = 1, y = -1$. $f''(x) = 6x$ såf er konkav opp når $x > 0$ og konkav ned når $x < 0$.

Oppgave 5 En 5 meter lang stige står lent mot en vertikal husvegg. Den sklir nedover langs husveggen med en vertikal hastighet på 3 meter/sekund. Da sklir også den nedre enden av stigen horisontalt i retning vekk fra huset. Hvor fort sklir den enden vekk fra huset når det øverste punktet på stigen er 4 meter opp langs husveggen?

LF oppgave 5
La $y(t)$ være høyden på stigen og $x(t)$ være avstand fra huset. $x^2(t) + y^2(t) = 5^2$. Vi deriverer: $2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$. Når stigen er 4 meter høy, når den 3 meter fra husveggen. $2 * 3 * x'(t) + 2 * 4 * (-3) = 0$.

$$x'(t) = 4$$

Oppgave 6 En befolkning $P(t)$ øker proporsjonalt med befolkningen slik at $P'(t) = kP(t)$. Anta at $P(0) = 1.000.000$ og at $P(1) = 2.000.000$. Hvor stor er $P(2)$?

LF oppgave 6

$P(t) = P(0)e^{kt}$. Så $e^k = 2$. $P(2) = P(0)e^{2k} = 4P(0) = 4.000.000$.

Oppgave 7 La $y = x^{3/2}$ og $y = 2 - x^{3/2}$ være to kurver.

a) Hvor stort er arealet mellom kurvene i første kvadrant?

b) Vis at

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{8}{27}(1 + 9x/4)^{3/2}\right) = \sqrt{1 + 9x/4}$$

c) Hvor stor er omkretsen til området mellom kurvene i første kvadrant?

LF oppgave 7

a) Kurvene treffes når $x^{3/2} = 2 - x^{3/2}, x^{3/2} = 1, x = 1$.

Arealet blir $\int_0^1 (2 - 2x^{3/2})dx = 2x - \frac{4}{5}x^{5/2}|_0^1 = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$.

b)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{8}{27}(1 + 9x/4)^{3/2}\right) &= \frac{8}{27} * \frac{9}{4} * \frac{3}{2}(1 + 9x/4)^{3/2-1} \\ &= \sqrt{1 + 9x/4}\end{aligned}$$

c) Omkretsen består av tre deler. Del 1: $y = f(x) = x^{3/2}, 0 < x < 1$ Lengde er $\int_0^1 \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{2}{3}\frac{4}{9}(1 + \frac{9}{4}x)^{3/2}|_0^1 = \frac{8}{27}((\frac{13}{4})^{3/2} - 1)$
Del 2: $y = g(x) = 2 - x^{3/2}$. Lengden blir det samme integralet, så lengden er også $\frac{8}{27}((\frac{13}{4})^{3/2} - 1)$.
Del 3 er intervallet fra 0 til 2 på $y-$aksen.

Omkretsen blir $\frac{16}{27}((\frac{13}{4})^{3/2} - 1) + 2$.

Oppgave 8 Finn andre grads Taylorpolynomet P_2 om $x = 0$ til funksjonen $f(x) = -\ln(1 - x)$.

LF oppgave 8

$f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{1-x}, f'(0) = 1, f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(0) = 1$

$$P_2(x) = x + \frac{1}{2}x^2.$$