Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Achenef Tesfahun (90 84 97 05)

Eksamen i Brukerkurs i matematikk A (MA0001)

Torsdag 05. august 2013
Tid: 9:00 – 13:00

Sensur: 21. august 2013

Hjelpemidler: A (Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler, samt en kalkulator).

NB! Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Måleresultater (t, y) blir plottet som punkter $(\ln t, \ln y)$ og havner da på en rett linje gjennom punktet $(4, 7)$ med stigningstall $m = 1/2$. Finn et uttrykk for y som funksjon av t. Finn t-verdien når $y = 2e^2$.

Løsning: Ligningen for linjen er

$$\ln y - 7 = \frac{1}{2}(\ln t - 4)$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln t + 5 = \ln \sqrt{t} + 5$$

$$\underline{\underline{y = e^5\sqrt{t}.}}$$

Når $y = 2e^2$, så er

$$2e^2 = e^5\sqrt{t}, \quad \sqrt{t} = 2e^{-3},$$

$$\underline{\underline{t = 4e^{-6} = \frac{4}{e^6}.}}$$

b) Mengden w av et radioaktivt stoff nedbrytes eksponensielt, det vil si,

$$w(t) = w_0 e^{-kt},$$

der w_0 og k er positive konstanter. Halveringstiden for stoffet er 2000 år. Etter hvor lang tid er 30% av stoffet brutt ned?

Løsning: Ved tid $t = 0$ har vi $w(0) = w_0 e^{-k\cdot 0} = w_0$, dvs., w_0 er mengden av stoffet ved tid $t = 0$ (initial mengden). Først vil vi bestemme k. Halveringstiden er tiden når mengden blir halvert, dvs., T (i våre oppgave $T = 2000$ år) slik at

$$w(T) = \frac{1}{2} w_0$$

Siden $w(T) = w_0 e^{-kT}$, får vi

$$w_0 e^{-kT} = \frac{1}{2} w_0, \quad e^{-kT} = \frac{1}{2},$$
$$-kT = \ln(1/2) = -\ln 2, \quad k = \frac{\ln 2}{T}$$

Siden $T = 2000$, får vi $k = \ln 2/2000$. Altså

$$w(t) = w_0 e^{-\frac{\ln 2}{2000} t}.$$

Tiden når 30% av stoffet brutt ned er tiden når vi har 70% av stoffet igjen. Dvs. vi vil finne t slik at $w(t) = 0,7w_0$. Så

$$w_0 e^{-\frac{\ln 2}{2000} t} = 0,7 w_0, \quad e^{-\frac{\ln 2}{2000} t} = 0,7$$
$$-\frac{\ln 2}{2000} t = \ln(0,7) = -\ln(10/7)$$
$$\underline{\underline{t = \frac{2000}{\ln 2} \ln(10/7) \approx 1029 \text{ år}}}$$

Oppgave 2

a) Bestem konstanten a slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{for } x \geq 0, \\ \frac{\sin(ax)}{x} & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Løsning:

Funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$ hvis

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

Vi har

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0^2 + 4 = 4$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} = a \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(ax)}{ax} = a.1 = a.$$

Derfor $f(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$ hvis $a = 4$.

b) Finn den deriverte av funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} + x^{1/3} + \ln(\sin x) + 4^x.$$

Løsning: Først merk at

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1.$$

Vi har altså

$$\frac{d}{dx}(x - 1) = 1, \qquad \frac{d}{dx} x^{1/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

Ved å bruke kjerne regelen får vi

$$\frac{d}{dx} \ln(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$
$$\frac{d}{dx} 4^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln 4} = (\ln 4) e^{x \ln 4} = (\ln 4) 4^x.$$

Derfor

$$\frac{d}{dx} f(x) = 1 + \frac{1}{3x^{2/3}} + \cot x + (\ln 4) 4^x.$$

c) Beregn (hint: bruke L' Hopitals regel)

$$\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{4^x - 1}.$$

Løsning: Siden uttrykket er på formen 0/0 bruker vi L'Hopitals regel til å beregne grenseverdien. Vi omskriver $4^x = e^{x \ln 4}$ og $5^x = e^{x \ln 5}$ slik at

$$\frac{d}{dx} 4^x = (\ln 4) 4^x, \quad \frac{d}{dx} 5^x = (\ln 5) 5^x.$$

Så ved å bruke L' Hopitals regel får vi

$$\underline{\underline{\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{4^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(5^x - 1)}{\frac{d}{dx}(4^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln 5)5^x}{(\ln 4)4^x} = \frac{(\ln 5)\cdot 1}{(\ln 4)\cdot 1} = \frac{\ln 5}{\ln 4}.}}$$

Oppgave 3

La y være en funksjon av x som er gitt implisit ved ligningen

$$y^2 + y + x^4 + 3x - 4 = 0.$$

Finn $\frac{dy}{dx}$. Finn tangenten til grafen av y i punktet $(1, -1)$.

Løsning: Vi deriverer uttrykket på begge sider av ligningen med hensyn på x:

$$\begin{aligned} 2y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + 4x^3 + 3 &= 0 \\ (2y+1)\frac{dy}{dx} &= -4x^3 - 3 \\ \underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{-(4x^3+3)}{2y+1}}}. \end{aligned}$$

Stigningstallet til tangenten til grafen av y i punktet $(1, -1)$ blir da

$$m = \frac{-(4(1)^3 + 3)}{2(-1) + 1} = 7.$$

Ligningen til denne tangenten er derfor

$$\begin{aligned} y - (-1) &= 7(x - 1) \\ &\underline{\underline{y = 7x - 8.}} \end{aligned}$$

Oppgave 4 Anta at endringen i temperaturen T i et vekstkammer (målt i Fahrenheit) over en 12-timers periode er gitt ved ligningen

$$\frac{d}{dt}T(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

for $0 \le t \le 12$. Tempraturen ved tid $t = 0$ er $T(0) = 45$.

a) Finn $T(t)$. Hva er temeperaturen etter 3 timer?

Løsning: Siden den deriverte av $T(t)$ er gitt som

$$\frac{d}{dt}T(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

så bruker vi antiderivasjon og får

$$T(t) = \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + C.$$

Vi kan nå bruke initial verdien $T(0) = 45$ for å bestemme konstanten C:

$$45 = T(0) = \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 0\right) + C = \frac{6}{\pi}\sin 0 + C = 0 + C = C.$$

Altså

$$\underline{\underline{T(t) = \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 45.}}$$

Temperaturen etter 3 timer blir da

$$T(3) = \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 3\right) + 45 = \frac{6}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}) + 45 = \frac{6}{\pi}\cdot 1 + 45 \approx \underline{\underline{46,9}}.$$

b) Finn den gjennomsnittlige temepraturen over tidsintervallet $[0, 12]$.

Den gjennomsnittlige temperaturen over tidsintervallet $[0, 12]$ er

$$\begin{aligned}
T_{avg} = \frac{1}{12-0}\int_0^{12} T(t)\,dt &= \frac{1}{12}\int_0^{12}\left\{\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 45\right\}dt \\
&= \frac{1}{12}\cdot\frac{6}{\pi}\int_0^{12}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\,dt + \frac{1}{12}\int_0^{12} 45\,dt.
\end{aligned}$$

Men

$$\begin{aligned}
\int_0^{12}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\,dt &= \left[\frac{-6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right]_0^{12} \\
&= -\frac{6}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 12\right) - \left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 0\right)\right\}\right] \\
&= -\frac{6}{\pi}\left[\cos 2\pi - \cos 0\right] \\
&= -\frac{6}{\pi}\left[1 - 1\right] = 0
\end{aligned}$$

og

$$\int_0^{12} 45\,dt = [45t]_0^{12} = 45 \cdot 12 - 45 \cdot 0 = 45 \cdot 12.$$

Derfor

$$\underline{\underline{T_{avg} = \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{\pi} \cdot 0 + \frac{1}{12} \cdot 45 \cdot 12 = 45.}}$$

Oppgave 5 La R være området i xy-planet avgrenset av kurvene

$$y = e^{-2x} \quad \text{og} \quad y = e^{2x} \quad \text{der} \quad 0 \leq x \leq 4.$$

a) Finn arealet av R.

Løsning: Arealet av R :

$$\begin{aligned} \text{Areal} = \int_0^4 (e^{2x} - e^{-2x})\,dx &= \frac{1}{2}\left[e^{2x} + e^{-2x}\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{2\cdot 4} + e^{-2\cdot 4} - e^{2\cdot 0} - e^{-2\cdot 0}\right] \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left[e^{8} + e^{-8} - 2\right].}} \end{aligned}$$

b) Finn volumet av omdreiningsområdet som beskrives når R roteres om x-aksen.

Løsning: Volumet blir

$$\begin{aligned} \text{Volume} = \pi \int_0^4 \left[(e^{2x})^2 - (e^{-2x})^2\right]\,dx =& \pi \int_0^4 \left[e^{4x} - e^{-4x}\right]\,dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{4}\left[e^{4x} + e^{-4x}\right]_0^4 \\ &= \frac{\pi}{4}\left[e^{4\cdot 4} + e^{-4\cdot 4} - e^{4\cdot 0} - e^{-4\cdot 0}\right] \\ &= \underline{\underline{\frac{\pi}{4}\left[e^{16} + e^{-16} - 2\right].}} \end{aligned}$$