Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen: Achenef Tesfahun (90 84 97 05)

Eksamen i Brukerkurs i matematikk A (MA0001)

Fredag 21. desember 2012
Tid: 9:00 – 13:00

Sensur: 21.januar 2013

Hjelpemidler: A (Alle trykte og skrevne, samt en kalkulator).

NB! Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmaåten frem- går tydelig av besvarelsen. Skriv opp de antagelsene du gjør i hver oppgave.

Oppgave 1 I en dyrebestand er andelen av et skadelig gen $p_0 = 0,3$. Etter n generasjoner er andelen p_n, gitt rekursivt ved

$$p_n = 1 - \frac{0,9999}{1 + p_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

Hva blir andelen av det skadelige genet i det lange løp (det vil si når $n \to \infty$)?

Løsning: Finn fikspunktene, dvs., finn p som oppfyller ligningen

$$p = 1 - \frac{0,9999}{1 + p}.$$

Da angir p kandidter for grenseverdien $\lim_{n\to\infty} p_n$. Så løser vi for p som følger:

$$p = 1 - \frac{0,9999}{1+p} \quad \Leftrightarrow \quad p - 1 = -\frac{0,9999}{1+p} \quad \Leftrightarrow \quad (p+1)(p-1) = -0,9999$$
$$p^2 - 1 = -0,9999 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 0,0001 \quad \Leftrightarrow \quad p = -0,01 \;\text{ eller }\; p = 0,01.$$

Men $p = -0,01$ kan ikke være grenseverdien fordi $p_0 = 0,3$ og $p_n > 0$ for alle $n \geq 1$ (dvs. p_n er positve for alle $n \geq 0$). Derfor

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0,01.$$

Andelen av det skadelige genet i det lange løp er altså $0,01$ (dvs. 1%).

Oppgave 2 Finn den deriverte av funksjonen $f(x) = e^{\sin x}$. Bruk den linære approksimasjonsmetoden til å finne en tilnærmet verdi for $e^{\sin(0,1)}$. (NB: vis mellomregningene).

Løsning: Ved å bruke kjerneregelen

$$f'(x) = e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x.$$

Husk nå at for x nær ett tall a kan vi tilnærme $f(x)$ med $f(a) + f'(a)(x-a)$, dvs.

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

Vi velger $a = 0$ for å tilnærme $e^{\sin(0,1)} = f(0,1)$. Grunnen for at vi velger $a = 0$ er den er nær $0,1$ og vi kan også beregne $f(0)$ uten å bruke kalkulator:

$$f(0) = e^{\sin 0} = e^0 = 1.$$

Ved å bruke den linære approksimasjon formelen ovenfor får vi da

$$e^{\sin(0,1)} = f(0,1) \approx f(0) + f'(0)(0,1-0) = 1 + 1 \cdot 0,1 = 1,1,$$

der vi brukte $f(0) = 1$ og $f'(0) = e^{\sin 0}\cos 0 = e^0 \cdot 1 = 1$.

Den tilnærmet verdien for $e^{\sin(0,1)}$ er derfor 1,1.

Oppgave 3 En bakteriekoloni har form som en sirkelskive. Arealet av sirkelen vokser med konstant fart $6,28\text{mm}^2/\text{time}$. Hvor fort vokser radiusen til sirkelen i det øyeblikket radiusen er 1cm?

Løsning: La $r(t)$ være radiusen av sirkelen ved tidspunktet t. Da har sirkelen areal

$$A(t) = \pi r^2(t).$$

Vi vet arealet av sirkelen vokser med fart $A'(t) = 6,28\text{mm}^2/\text{time}$. Vi søker $r'(t)$ akkurat i det $r(t) = 1\text{cm} = 10\text{mm}$. Vi deriverer derfor uttrykket for $A(t)$ med hensyn på t:

$$A'(t) = \pi 2r(t)r'(t) \qquad \text{(ved å bruke kjerneregelen)}$$

som gir sammenhengen (koblingen) mellom $A'(t)$ og $r'(t)$. Siden $A'(t) = 6,28\text{mm}^2/\text{time}$ og $r(t) = 10\text{mm}$, får vi da

$$r'(t) = \frac{A'(t)}{2\pi r(t)} = \frac{6,28\text{mm}^2/\text{time}}{2\pi \cdot 10\text{mm}} \approx 0,1\text{mm}/\text{time}.$$

Vekstraten til radiusen (i det øyeblikket radiusen er 1cm) er altså circa 0,1 mm/time.

Oppgave 4

a) Finn de horisontale og vertikale asymptoter til funksjonen $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x-2}$.

Løsning:

i) **Horisontal asymptoter:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1.$$

På samme måte

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = 1.$$

Derfor $y = 1$ er den eneste horisontal asymptoten til $f(x)$.

ii) **Vertikal asymptoter:** Vi kan omskrive

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}, \quad \text{for } x \neq -1.$$

Siden $f(x)$ ikke er definert for $x = -1$ eller $x = 2$, undersøker vi grenseverdien til $f(x)$ i disse punktene :

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-2} = -\infty.$$

og

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = \infty.$$

Derfor $x = 2$ er den eneste vertikal asymbtoten til $f(x)$ (per definisjon), mens $x = -1$ er kunn bruddpunkt til $f(x)$.

b) Bruk L' Hopitals regel til å finne

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x,$$

hvor c er en konstant.

Løsning:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{c}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{c}{x}\right)}$$

men ved L'Hopitals regel

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{c}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{c}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{[\ln\left(1+\frac{c}{x}\right)]'}{[\frac{1}{x}]'}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{c}{x}}\cdot -\frac{c}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = c\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{c}{x}} = c\cdot 1 = c.$$

Derfor

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x = e^c.}}$$

Oppgave 5 Anta at endringen i en biomasse $B(t)$ ved tid t er gitt ved ligningen

$$\frac{d}{dt}B(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

for $0 \le t \le 24$.

Biomassen ved tid $t = 0$ er $B(0) = 100$. Finn biomassen $B(t)$ for enhver tid t .

Finn $B(24)$.

Finn den gjennomsnittlige biomassen over tidsintervallet $[0, 24]$.

Løsning: Siden den deriverte av $B(t)$ er gitt som

$$\frac{d}{dt}B(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right),$$

så bruker vi antiderivasjon og får

$$B(t) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + C.$$

Vi kan nå bruke initial verdien $B(0) = 100$ for å bestemme konstanten C.

$$100 = B(0) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 0\right) + C = \frac{12}{\pi}\sin 0 + C = 0 + C = C.$$

Altså

$$\underline{\underline{B(t) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 100.}}$$

Neste kan vi sette $t = 24$ og få

$$\underline{\underline{B(24) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}\cdot 24\right) + 100 = \frac{12}{\pi}\sin 2\pi + 100 = 0 + 100 = 100.}}$$

Den gjennomsnittlige biomassen over tidsintervallet $[0, 24]$ er

$$\begin{aligned} B_{avg} = \frac{1}{24-0}\int_0^{24} B(t)\,dt &= \frac{1}{24}\int_0^{24}\left\{\frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 100\right\}dt \\ &= \frac{1}{24}\cdot\frac{12}{\pi}\int_0^{24}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\,dt + \frac{1}{24}\int_0^{24} 100\,dt. \end{aligned}$$

Men

$$\begin{aligned} \int_0^{24}\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\,dt &= \left[\frac{-12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right]_0^{24} \\ &= -\frac{12}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot 24\right) - \left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}\cdot 0\right)\right\}\right] \\ &= -\frac{12}{\pi}\left[\cos 2\pi - \cos 0\right] \\ &= -\frac{12}{\pi}\left[1 - 1\right] = 0 \end{aligned}$$

og

$$\int_0^{24} 100\,dt = [100t]_0^{24} = 100\cdot 24 - 100\cdot 0 = 100\cdot 24.$$

Derfor

$$\underline{\underline{B_{avg} = \frac{1}{24}\cdot\frac{12}{\pi}\cdot 0 + \frac{1}{24}\cdot 100\cdot 24 = 100.}}$$

Oppgave 6

a) La R være området i xy-planet avgrenset av kurvene

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{og} \quad y = x - 1.$$

Finn arealet av R.

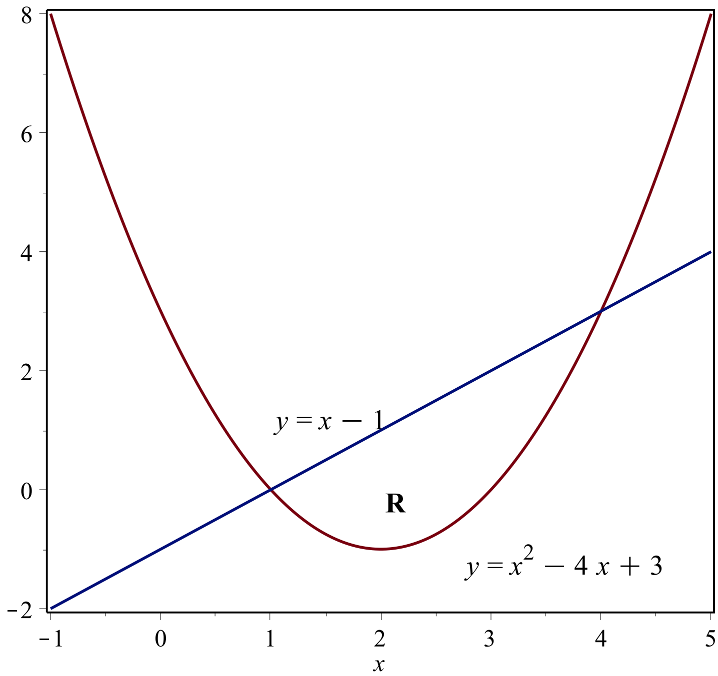
Løsning: Kjærningspunktene mellom kurvene $y = x^2 - 4x + 3$ og $y = x - 1$ kan beregnes ved å løse ligningen

$$x^2 - 4x + 3 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Da er

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

$x = 1$ og $x = 4$ er altså kjæringspunktene.



Arealet av R blir da

$$\begin{aligned}
A = \int_1^4 \left\{(x-1) - (x^2-4x+3)\right\}\, dx &= \int_1^4 (-x^2+5x-4)\, dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2} - 4x\right]_1^4 \\
&= \left[-\frac{4^3}{3} + 5\cdot\frac{4^2}{2} - 4\cdot 4\right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 5\cdot\frac{1^2}{2} - 4\cdot 1\right] \\
&= \left[-\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right] \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Altså

$$\underline{\underline{A = \frac{9}{2}.}}$$

b) Finn

$$\int_{-\infty}^{-1} \left(e^{2x} + \frac{1}{x^{10}}\right)\, dx.$$

Løsning: Per definisjon

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} e^{2x} + \frac{1}{x^{10}}\, dx &= \lim_{z\to-\infty} \int_z^{-1} e^{2x} + \frac{1}{x^{10}}\, dx \\
&= \lim_{z\to-\infty} \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{9x^9}\right]_z^{-1} \\
&= \lim_{z\to-\infty} \left[\frac{e^{2\cdot -1}}{2} - \frac{1}{9(-1)^9} - \left(\frac{e^{2\cdot z}}{2} - \frac{1}{9z^9}\right)\right] \\
&= \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{9} - \lim_{z\to-\infty} \left(\frac{e^{2z}}{2} - \frac{1}{9z^9}\right) \\
&= \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Ovenfor brukte vi

$$(-1)^9 = -1, \quad \lim_{z\to-\infty} \frac{e^{2z}}{2} = 0, \quad \lim_{z\to-\infty} \frac{1}{9z^9} = 0.$$

Derfor

$$\underline{\underline{\int_{-\infty}^{-1} e^{2x} + \frac{1}{x^{10}}\, dx = \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{9}.}}$$