MA0001 Brukerkurs i matematikk A
Høst 2011

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 1

$\boxed{1}$ (1.1.1)

Finn de to numrene som har distanse 3 fra -1 ved å bruke en passende ligning. (Hint: Du skal bruke absolutt verdier)

Vi løser ligningen $|x-(-1)| = 3$:

$$\begin{aligned} |x-(-1)| = |x+1| &= 3 \\ x+1 &= 3 \quad \text{eller} \quad x+1 = -3 \\ x &= 2 \quad \text{eller} \quad x = -4 \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{\text{De to tallene som har distanse 3 fra } -1 \text{ er 2 og } -4.}}$

$\boxed{2}$ (1.1.3 : c, d)

Løs følgende ligninger:

a) $|2x+3| = 5$

Vi løser ligningen:

$$\begin{aligned} |2x+3| &= 5 \\ 2x+3 &= 5 \quad \text{eller} \quad 2x+3 = -5 \\ 2x &= 2 \quad \text{eller} \quad 2x = -8 \\ x &= 1 \quad \text{eller} \quad x = -4 \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{\text{Løsningene for ligningen } |2x+3| = 5| \text{ er } x = 1 \text{ og } x = -4.}}$

b) $|7-3x| = -2$

Svar: Siden absoluttverdien av et tall alltid er positiv ser vi at det ikke finnes noen løsninger for denne ligningen.

$\boxed{3}$ (1.1.4b)

Løs følgende ligning: $|5-3u| = |3+2u|$

Vi må løse følgende ligninger: $5 - 3u = 3 + 2u$ og $5 - 3u = -(3 + 2u)$ (Hvorfor vi ikke får 4 ligninger er nevnt på forelesning, spør studass hvis du lurer).

$$\begin{aligned} 5 - 3u &= 3 + 2u & 5 - 3u &= -3 - 2u) \\ 3u + 2u &= 5 - 3 & -2u + 3u &= 5 + 3 \\ 5u &= 2 & u &= 8 \\ u &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Svar: Løsningene for ligningen $|5 - 3u| = |3 + 2u|$ er $u = 2/5$ og $u = 8$.

$\boxed{4}$ (1.1.6 : a, b)

Løs følgende ulikheter:

a) $|2x + 3| < 6$

$|2x + 3| < 6$ betyr at vi må ha $-6 < 2x + 3 < 6$. Vi løser denne ulikheten:

$$\begin{array}{rcl} -6 < & 2x + 3 & < 6 \\ -6 - 3 < & 2x + 3 - 3 & < 6 - 3 \\ -9 < & 2x & < 3 \\ \frac{-9}{2} < & x & < \frac{3}{2} \end{array}$$

Svar: Løsningen av ulikheten $|2x + 3| < 6$ er $x \in \left(\frac{-9}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

b) $|3 - 4x| \geq 2$

$|3 - 4x| \geq 2$ betyr at vi må ha $3 - 4x \geq 2$ eller $3 - 4x \leq -2$. Vi løser disse ulikhetene:

$$\begin{aligned} 3 - 4x &\geq 2 & 3 - 4x &\leq -2 \\ -4x &\geq -1 & -4x &\leq -5 \\ 4x &\leq 1 & 4x &\geq 5 \\ x &\leq \frac{1}{4} & x &\geq \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Svar: Løsningen av ulikheten $|3 - 4x| \geq 2$ er $x \leq \frac{1}{4}$ eller $x \geq \frac{5}{4}$.

NB!: Merk at når vi ganget med -1 for å få fjerne minustegnet foran $4x$ så måtte vi snu ulikheten andre veien.

$\boxed{5}$ (1.1.11)

Finn ligningen for linja som går gjennom punktene $(-2, -3)$ og $(1, 4)$. Skriv den opp i det boka omtaler som "Standard Form" og det boka omtaler som "Slope-Intercept Form".

Merk: Det kan finnes flere korrekte ligninger for linja, f.eks. er $2y + 4x + 6 = 0$ og $y + 2x + 3 = 0$ begge ligninger for sammme linje (tenk igjennom hvorfor det er sånn!).

Fra boka får vi at stigningstallet blir $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-3)}{1-(-2)} = \frac{7}{3}$.
Får da at ligninga for linja er: $y - y_0 = y - 4 = m(x - x_0) = \frac{7}{3}(x-1)$.
Dermed får vi $y = \frac{7}{3}x - \frac{7}{3} + 4 = \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$.
Svar: Ligningen for linja gjennom punktene $(-2,-3),(1,4)$ på "Standard Form" er $y - \frac{7}{3}x - \frac{5}{3} = 0$. På "Slope-Intercept Form" blir ligningen $y = \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$.

$\boxed{6}$ (1.1.13)

Finn ligningen for linja som går gjennom punktene $(0,4)$ og $(3,0)$. Skriv den opp i det boka omtaler som "Standard Form" og det boka omtaler som "Slope-Intercept Form".

Stigningstall: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-4}{3-0} = \frac{-4}{3}$.
Ligning for linja: $y - y_0 = y - 0 = m(x - x_0) = \frac{-4}{3}(x-3) = \frac{-4}{3}x + 4$.
"Standard Form": $y + \frac{4}{3}x - 4 = 0$.
"Slope-Intercept Form": $y = \frac{-4}{3}x + 4$.
Svar: Ligningen for linja gjennom punktene $(0,4)$ og $(3,0)$ på "Standard Form" er $y + \frac{4}{3}x - 4 = 0$ og på "Slope-Intercept Form" er den $y = \frac{-4}{3}x + 4$.

$\boxed{7}$ (1.1.29)

Finn ligningen til linja som er parallell med linja som går gjennom punktene $(0,1)$ og $(3,0)$, og som går gjennom punktet $(-1,-1)$

Vi finner stigningstallet til linja gjennom $(0,1)$ og $(3,0)$, siden linjene er parallelle har de samme stigningstall. Dermed finner vi da også stigningstallet til den linja vi skal finne ligningen til.
Stigningstall: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{3-0} = \frac{-1}{3}$
Fra formellen for ligninga til linja får vi da at ligninga til linja blir:
Ligning: $y - y_0 = y - (-1) = y + 1 = m(x - x_0) = \frac{-1}{3}(x - (-1)) = \frac{-1}{3}x - \frac{-1}{3}$.
Svar: Ligningen til linja som er parallell med linja som går gjennom punktene $(0,1)$ og $(3,0)$, og som går gjennom punktet $(-1,-1)$ er $y = \frac{-1}{3}x - \frac{4}{3}$.

$\boxed{8}$ (1.1.40)

Finn ligningen til linja som står vinkelrett på den horisontale linja som går gjennom $(3,1)$, og som går gjennom punktet $(4,2)$.

Vi får opplyst at linja vi er ute etter står vertikalt på en horisontal linje. Dermed vet vi at linja vår må være en vertikal linje. Linja skal gå gjennom punktet $(4,2)$, og dermed får vi at ligningen for linja blir $x = 4$.
Svar: Ligninga for linja som står vinkelrett på den horisontale linja gjennom $(3,1)$, og som går gjennom punktet $(4,2)$, er $x = 4$.

$\boxed{9}$ (1.1.52)

Temperaturer måles gjerne i 3 ulike skalaer, Fahrenheit, Celsius og Kelvin. Sammenhengen mellom de 3 er lineær.

a) Målt i Celcius eller Farhenheit har vann frysepunkt ved henholdsvis 0°C og 32°F, og kokepunkt ved henholdsvis 100°C og 212°F. Finn et utrykk for grader Fahrenheit utrykk ved grader Celsius.

Siden sammenhengen skal være lineær, kan vi la grader Fahrenheit være y-verdien vår og grader Celsius være x-verdien vår. Da skal får vi at vi skal finne ligningen til linja som går gjennom punktene $(0, 32)$ og $(100, 212)$. Vi finner ligningen for linja på vanlig måte.
Stigningstall: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$.
Ligning for linja: $y - y_0 = y - (-1) = y - 32 = m(x - x_0) = \frac{9}{5}(x - 0) = \frac{9}{5}x$.
Svar: Ligninga for grader Fahrenheit utrykt ved grader Celsius er $y = \frac{9}{5}x + 32$.

b) Vanlig kroppstemperatur varierer ligger mellom 97, 6°F og 99, 6°F. Utifra dette, finn ut hva som er vanlig kroppstemperatur målt i °C.

Vi bruker ligninga fra a) delen av oppgaven. Grader Fahrenheit er y-verdien, så vi setter inn disse og løser for x.

$$\begin{aligned} 97,6 &= \frac{9}{5}x + 32 & \quad 99,6 &= \frac{9}{5}x + 32 \\ \frac{9}{5}x &= 65.6 & \frac{9}{5}x &= 67.6 \\ x &= \frac{5}{9}65.6 & x &= \frac{5}{9}67.6 \\ x &\approx 36.4 & x &\approx 37.6 \end{aligned}$$

Svar: Normal kroppstemperatur ligger mellom 36.4°Cog 37.6°C.

$\boxed{10}$ $(1.1.53a)$

Kelvinskalaen er en absolutt temperaturskala. Det vil si at 0K er er den laveste temperaturen det er mulig å oppnå. 0K svarer til −273.15°C, og inndelingen i Kelvinskalaen er lik inndeling i Celsiusskalaen (mao. er 1K = −272.15°C). Finn en ligning som konverterer en temperatur målt i Kelvin til temperaturen målt i grader Celsius.

La y være en temperatur målt i Celsius, og x være en temperatur målt i Kelvin. Vi vil finne en ligning på formen $y = ax + b$. Vi vet at hvis $x =$ 0K, så er $y = -273.15$°C. Dermed er $b = -273.15$. Videre vet vi at inndelingen er lik i kelvinskalaen og celsiusskalaen. Dermed må vi ha $a = 1$. Så ligningen blir $y = x - 273.15$.
Svar: Sammenhengen mellom temperaturer målt i Kelvin og temperaturer målt i Celsius er gitt ved ligningen $y = x - 273.15$.

$\boxed{11}$ (1.1.58)

a) Finn alle mulig verdier for radiusen til en sirkel, med sentrum i $(3, 6)$, som er slik at sirkelen kun skjærer en av aksene (enten x-aksen eller y-aksen).

La r betegne radiusen. Vi ser at avstanden til y-aksen er 3 og avstanden til x-aksen er 6. Dermed ser vi at hvis $r < 3$ skjærer ikke sirkelen noen av aksene. Hvis $r \geq 6$ så skjærer sirkelen begge aksene. Dermed får vi at en sirkel med sentrum i i punktet $(3, 6)$ skjærer kun en av aksene når $3 \leq r < 6$.
Svar: De mulig verdiene for radiusen til en sirkel med sentrum i $(3, 6)$ som kun skjærer en av aksene er $r \in [3, 6)$.

b) Finn all mulig verdier for radiusen til en sirkel, med sentrum i $(3, 6)$, som er slik at sirkelen skjærer både x-aksen og y-aksen.

Utifra argumentasjonen i a) delen ser vi at dette må være $r \geq 6$.
Svar: De mulige verdiene for radiusen r for en sirkel med sentrum i $(3, 6)$ slik at sirkelen kun skjærer en av aksene er $r \geq 6$.

$\boxed{12}$ Av og til møter vi ligninger på formen $ax^2 + bx = c$, og ønsker å få en ligning på formen $(dx - e)^2 = f$ med samme løsningsmengde, det vil si at de samme x'ene løser begge ligninger. Dette kalles å fullføre kvadrater. Her er et eksempel hvor vi fullfører kvadratet i ligningen $x^2 + 2x = 3$:

$x^2 + 2x = 3$	
$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$	Her har vi lagt til 1 på begge sider av likhetstegnet.
$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 4$	Her har vi fullført kvadratet.

Merk at vi sjekker at vi har fullført kvadratet korrekt ved å skrive ut kvadratet og se at vi får det samme.

I denne oppgaven skal du fullføre kvadratet i de gitte ligningene.

a) $x^2 - 2x = 4$

Utifra eksempelet over er det naturlig å se på hva vi får når vi ganger ut $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Dermed ser vi at hvis vi legger til 1 på begge sider, kan vi fullføre kvadratet. Vi får da $(x - 1)^2 = 5$.
Svar: Det fullførte kvadratet blir $(x - 1)^2 = 5$.

b) $x^2 + 6x - 2 = 0$

Hvis vi ser på det det eksempelet i oppgaven og på a) delen av oppgaven ser vi at begge ganger har vi tallet foran x vært delelig med to men ikke tre. Nå er tallet delelig med to og tre, så dermed er det naturlig å prøve å se om vi enten skal legge til eller trekke fra 3 først. Videre ser vi fra de eksempelet og a) delen at det er naturlig å prøve å legge til tre først utifra fortegnet foran 6 tallet i denne oppgaven. Vi prøver altså og gange ut $(x + 3)^2$ og ser.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Dermed ser vi at hvis vi legger til 11 på begge sider av likhetstegnet så får vi fullført kvadratet.
Svar: $\underline{\underline{\text{Det fullførte kvadratet blir } (x + 3)^2 = 11.}}$

Kommentar: Det kan sikkert føles litt vanskelig å gjette seg fram til hvordan vi fullfører kvadratet. Hvis dere studerer eksempelet og de to oppgavene jeg har gitt, ser dere framgangsmåten. Det første er at hvis x leddet blir trukket fra (minus foran) så skal også tallet inni parentesen trekkes fra. Og likens hvis hvis det er pluss foran x leddet så skal tallet i parantesen legges til. Videre så ser dere at tallet dere skal legge til/trekke fra i parantesen alltid er tallet foran x leddet delt på 2. Tilslutt ser vi at vi alltid legger til et tall på begge sider av likhetstegnet, dette tallet er alltid tallet vi legge til/trekker fra inne i parantesen opphøyd i annen (Dette sto ikke forklart i oppgaven fordi jeg ønsker at dere skulle prøve å finne ut av det selv).

$\boxed{13}$ (1.1.61)

Finn sentrum og radius til sirkelen gitt ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

Hint: Fullfør kvadratene i ligningen for å få ligningen på den formen du er vant med.

Vi bruker hintet og fullfører kvadratene. Utifra hva vi lærte i oppgaven over får vi at vi må legge til 4 og legge til en på begge sider (vi må fullføre begge kvadratene). Gjør vi dette får vi:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 11 = 5$$
$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 16$$

Svar: $\underline{\underline{\text{Sentrum til sirkelen er i punktet } (2, -1) \text{ og radiusen til sirkelen er 4.}}}$

$\boxed{14}$ $(1.1.68 : a, b)$

Finn verdiene i intervallet $[0, 2\pi)$ slik at

a)

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Ser vi på figur 1.8 i læreboka ser vi at $-\cos\alpha = \cos(\pi-\alpha) = \cos(\alpha-\pi)$. Videre får vi fra tabell 1-1 i boka at $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dermed får vi følgende:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \cos(\alpha-\pi) &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{eller} \quad \cos(\pi-\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \alpha-\pi &= \frac{\pi}{4} \quad \text{eller} \quad \pi-\alpha = \frac{\pi}{4} \\ \alpha &= \frac{5\pi}{4} \quad \text{eller} \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Det kan ikke være flere løsninger siden det kun finnes to punkt på sirkelen med samme x-verdi (se figur 1.8 i boka). Svar: De mulig verdiene i intervallet $[0, 2\pi)$ slik at $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ er $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ og $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

b)

$$\sec\alpha = 2$$

Vi vet at $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$. Dermed kan vi like godt finne α slik at $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Fra boka side 8 får vi at $cos\alpha = \cos(-\alpha)$, og fra tabell 1-1 på samme side får vi $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Dermed er også $\cos -\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, men $-\frac{\pi}{3}$ er ikke en vinkel mellom 0 og 2π. Vi vet derimot at hvis vi legger til 2π får vi samme vinkelen, og $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.
Svar: De mulig verdiene i intervallet $[0, 2\pi)$ slik at $\sec\alpha = 2$ er $\alpha = \frac{\pi}{3}$ og $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.

15 1.1.71

Finn alle θ i intervalet $[0, 2\pi)$ slik at $2\cos\theta\sin\theta = \sin\theta$

Vi har følgende:

$$\begin{aligned} 2\cos\theta\sin\theta &= \sin\theta \\ \sin\theta(2\cos\theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Dermed må enten $\sin\theta = 0$ eller $2\cos\theta - 1 = 0$. Vi løser disse. Vi vet at $\sin\theta = 0$ for $\theta = 0$ og $\theta = \pi$. Vi ser så på $2\cos\theta - 1 = 0$:

$$\begin{aligned} 2\cos\theta - 1 &= 0 \\ 2\cos\theta &= 1 \\ \cos\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ser vi i tabell 1-1 side 8 i boka finner vi at dette holder for $\theta = \frac{\pi}{3}$, og dermed blir den andre løsningen $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$. Svar: De mulige θ i intervalet $[0, 2\pi)$, slik at $2\cos\theta\sin\theta = \sin\theta$, er $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ og $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

16 **1.1.74a**

Evaluer følgende utrykk:

$$(2^4 2^{-3/2})^2$$

$$\begin{aligned}(2^4 2^{-3/2})^2 &= 2^{2\cdot 4} 2^{-3/2\cdot 2}\\ &= 2^8 2^{-3}\\ &= 2^{8-3}\\ &= 2^5\\ &= 32\end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{32.}}$

$\boxed{\text{17}}$ $(1.1.76 : b)$

Hvilket reelt tall x tilfredstiller

$$\log_{1/4} x = 2?$$

$$\begin{aligned}\log_{1/4} x &= 2\\ \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{1/4} x} &= \left(\frac{1}{4}\right)^2\\ x &= \left(\frac{1}{4}\right)^2\\ x &= \frac{1}{16}\end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{x = \frac{1}{16}\text{ tilfredstiller ligningen.}}}$

$\boxed{\text{18}}$ $(1.1.77 : b)$

Hvilket reelt tall x tilfredstiller

$$\log_{1/3} 81 = x$$

$$\begin{aligned}\log_{1/3} 81 &= x\\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/3} 81} &= \left(\frac{1}{3}\right)^x\\ 81 &= \left(\frac{1}{3}\right)^x\\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} &= \left(\frac{1}{3}\right)^x\\ x &= -4\end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{x = -4\text{ tilfredstiller ligningen.}}}$

$\boxed{19}$ (1.1.82 : b)

Finn x slik at

$$9^{2x+1} = 27$$

$$\begin{aligned} 9^{2x+1} &= 27 \\ 9^{2x}9 &= 27 \\ 3^{2\cdot 2x}3^2 &= 3^3 \\ 3^{4x} &= 3 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{x = \frac{1}{4} \text{ tilfredstiller ligningen.}}}$