MA0001 høsten 2010
Løsningsforslag til øving 10

Gard Spreemann

oppdatert 15. november 2010

Oppgavene er hentet fra læreboken i faget.

Løsning (1.review.6). Anta at verdens befolkning ved tid 0 er p_0. Ved dobling vært 25. år har vi da etter en tid t en befolkning

$$p(t) = p_0 \cdot 2^{t/(25 \text{ år})}.$$

Jordens radius er $r = 7900/2 \text{ mi} = 6355550 \text{ m}$, så landearealet er

$$A = 0{,}29 \cdot 4\pi r^2 = 1{,}472 \cdot 10^{14} \text{ m}^2 = 1{,}472 \cdot 10^8 \text{ km}^2.$$

Vi får da etter en tid t en befolkningstetthet

$$d(t) = \frac{p(t)}{A} = \frac{p_0}{1{,}472 \cdot 10^8} 2^{t/(25 \text{ år})} \text{ km}^{-2}.$$

Det er så bare å sette inn for p_0 og t.

Løsning (1.review.22). a) Ved innsetting og reglene for eksonentiering har vi

$$\ln \frac{N(t+1)}{N(t)} = \ln \frac{N_0 e^{r(t+1)}}{N_0 e^{rt}} = \ln e^r = r.$$

b) i: 100%. ii: Vi har dobling når $e^{rt} = 2^t$, altså når $r = \ln 2$.
c) Vi vil finne T slik at $e^{1{,}013T} = 2$. Vel

$$1{,}013T = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{1{,}013}$$

d) Meningsløst... de spesielt interessert kan slå opp "rule of 70" på Wikipedia.

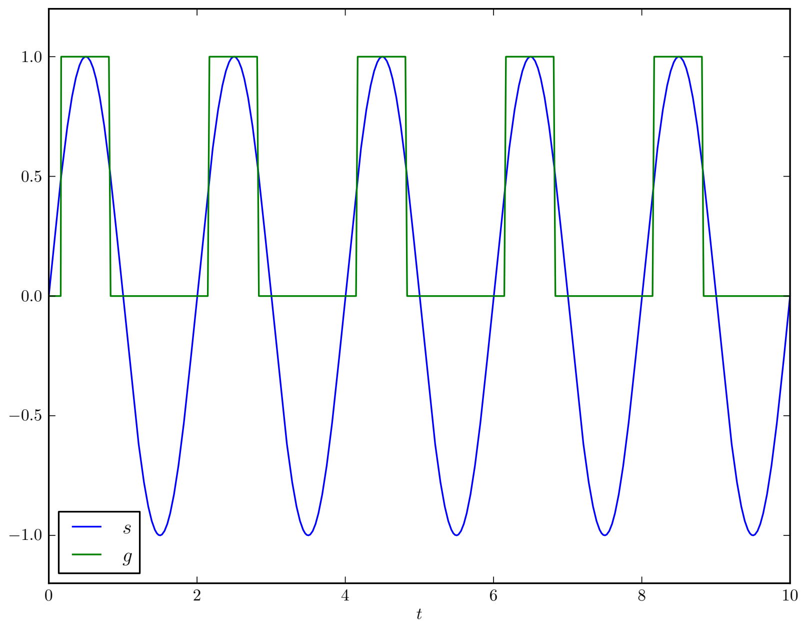
Løsning (3.review.4). Boken velger sine ord dårlig. Funksjonen f er kontinuerlig *overalt hvordan er definert*. Spørsmålet bør heller være "hvor er f kontinuerlig?". Svaret på dette er såfrem nevner ikke er 0, altså overalt bortsett fra i ± 1.

Løsning (3.review.4). Jeg gir et forslag til en funksjon $f : [0, 2] \to R$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{for } x < 1 \\ 4 & \text{for } x = 1 \\ 3e^{1-x} & \text{for } x > 1. \end{cases}$$

Det er lett å bekrefte at denne funksjonen har de søkte egenskaper. Den kan også skisseres.

Løsning (3.review.13). Figur 1 angir plottene. Det er klart at s er kontinuerlig, mens g ikke er det.



Figur 1: Plott tilhørende oppgave 3.review.13.

(For øvrig hadde det nok vært mye mer realistisk å se på respons når $|s(t)| \geq 1/2$, men oppgaven ser altså på $s(t) \geq 1/2$.

Løsning (4.review.5). Vi merker oss ved kjerneregelen og produktregelen at

$$f'(x) = 2e^{2x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + e^{2x}\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = e^{2x}\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$$

Løsning (4.review.8). Vi merker oss at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+1) = \frac{1}{x+1},$$

så som over får vi

$$g'(x) = -e^{-x}\ln(x+1) + e^{-x}\frac{1}{x+1} = e^{-x}\left(\frac{1}{x+1} - \ln(x+1)\right).$$

Løsning (4.review.21). (Jeg dropper enheter i denne oppgaven). Litt enkel geometri gir at avstanden til fuglene er

$$r(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 100^2}$$

ved en tid t. Vi deriverer og finner

$$r'(t) = \frac{1}{2\sqrt{(x(t))^2 + 100^2}} 2x(t)x'(t) = \frac{x(t)}{r(t)}v(t) = \frac{\sqrt{(r(t))^2 - 100^2}}{r(t)}v(t)$$

hvor $v(t)$ er fuglenes horisontale fart, altså $v(t) = 6$. Når avstanden $r(t) = 320$, har vi altså

$$r'(t) = \frac{92400}{320} \cdot 6 = \frac{3}{160}\sqrt{92400} \approx 5{,}7.$$

Vi kunne også ha brukt implisitt derivasjon.

Løsning (4.review.23). a) Kjerneregelen gir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = e^{f(x)}f'(x).$$

b) Kjerneregelen gir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = \frac{1}{f(x)}f'(x).$$

c) Kjerneregelen gir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = 2f(x)f'(x).$$

Løsning (5.review.3). a) Vi har

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \tag{1}$$

så det er klart at tanh er monotont voksende. (Her kan vi også bruke førstederiverttesten og se at den deriverte er positiv). Vi ser også at når x blir stor, dominerer de variable leddene i brøken over konstantleddene, så

$$\lim_{x\to\infty} \tanh x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1.$$

Når $x \to -\infty$ dominerer konstantleddene, så

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{1} = 1.$$

b) Hvis en tar kodomenet til tanh til å være $[-1, 1]$, gir monotisiteten vi disktuerte over invertibilitet.

For å sjekke at f^{-1} virkelig er en invers til f, setter vi inn i ligning (1) og finner

$$(f \circ f^{-1})(x) = \tanh\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{e^{\ln\frac{1+x}{1-x}} - 1}{e^{\ln\frac{1+x}{1-x}} + 1} = \frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1+x}{1-x} + 1} = x,$$

og likeledes for $(f^{-1} \circ f)(x)$ (det er bare å sette inn). Dermed er f^{-1} invers til f.

c) Vi merker oss først at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1+x}{1-x} = \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Igjen bruker vi kjerneregelen, og får

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

d) (Kommentaren i oppgaven at en skal bruke det en fant i oppgave c er tull). Vi merker oss først ved direkte innsetting av definisjonene at

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

og

$$\cosh'(x) = \sinh(x).$$

Deretter kan vi bruke brøkregelen for å finne

$$\tanh'(x) = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$