MA0001 høsten 2010
Løsningsforslag til øving 7

Gard Spreemann

oppdatert 18. oktober 2010

Oppgavene er hentet fra læreboken i faget.

Løsning (4.1.29). Grafen til $y(x) = \sqrt{x}$ har stigningstall $y'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Spesielt er $y'(4) = 1/4$. Dermed er vi ute etter den rette linje med stigningstall $1/4$ som går gjennom $(4, 2)$. Denne er gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{4}x + b$$

hvor $2 = f(4) = 4/4 + b \Rightarrow b = 1$, altså

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 1.$$

Løsning (4.1.31). Grafen til $y(x) = -3x^2$ har stigningstall $y'(x) = -6x$, så i $(-1, -3)$ er stigningstallet $y'(-1) = 6$. Den rette linje gjennom $(-1, -3)$ ortogonal på tangenten til y har da stigninstall $-1/6$ og er gitt av

$$f(x) = -\frac{1}{6}x + b$$

hvor $-3 = f(-1) = 1/6 + b \Rightarrow b = -19/6$, så

$$f(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{19}{6}.$$

Løsning (4.2.73). *Merk: Her er bokens fasit feil!*

Kurven gitt av $f(x) = x$ har stigningstall 1, så vi søker alle x slik at $y'(x) = 1$. Vel,

$$y'(x) = 4x,$$

så $x = 1/4$. Tangenten til y er altså parallell til f kun i punktet $(1/4, -3/8)$.

Løsning (4.2.78). $y'(x) = 2x$, så en tangentlinje gjennom $(z, y(z))$ er på formen

$$f_z(x) = 2zx + b,$$

hvor b er slik at f_z skjærer $(0, -1)$ og $(z, y(z))$. Det første kravet gir at $b = -1$, så dermed er f_z en tangentlinje hvis og bare hvis $2zz - 1 = y(z) = z^2$, altså hvis og bare hvis $z^2 = 1$. Dermed må $z = -1$ eller $z = 1$. Vi har altså *to* mulige tangenter, gitt av

$$f_{-1}(x) = -2x - 1$$

og

$$f_1(x) = 2x - 1.$$

Løsning (4.2.81). Siden P er en polynomfunksjon av grad 4, er den på formen

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Da er

$$P'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d,$$

som kan skrives på formen

$$P'(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

(altså $A = 4a$, $B = 3b$, $C = 2c$, $D = d$), som viser at P' er en polynomfunksjon av grad 3.

Løsning (4.3.85). Siden f er deriverbar kan vi bruke kvotientregelen:

$$y'(x) = \frac{(2x + 4f'(x))f(x) - (x^2 + 4f(x))f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Altså er

$$\begin{aligned} y'(2) &= \frac{(2 \cdot 2 + 4f'(2))f(2) - (2^2 + 4f(2))f'(2)}{(f(2))^2} \\ &= \frac{(4 + 4 \cdot 1) \cdot (-1) - (4 + 4 \cdot (-1)) \cdot 1}{1^2} = -8. \end{aligned}$$

Løsning (4.3.93). Siden $x_1 > 0$ kan vi skrive hyperbelen som en funksjon f i en omegn av x_1:

$$f(x) = \frac{c}{x}.$$

Da er

$$f'(x) = -\frac{c}{x^2}.$$

Tangenten til hyperbelen i (x_1, y_1) er da på formen

$$g(x) = -\frac{c}{x_1^2}x + b.$$

Konstanten b er slik at $y_1 = c/x_1 = g(x_1) = -c/x_1 + b$, altså er $b = 2c/x_1$, og tangenten g er

$$g(x) = -\frac{c}{x_1^2}x + \frac{2c}{x_1}$$

Skjæringspunktet mellom g og x-aksen er gitt av

$$\begin{aligned} 0 = g(x) &= -\frac{c}{x_1^2}x + \frac{2c}{x_1} \\ 0 &= -\frac{1}{x_1^2}x + \frac{2}{x_1}, \end{aligned}$$

som vi ser er uavhengig av c.

Løsning (4.4.47). Ved implisitt derivasjon har vi

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + y^2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}4 \\ 2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Løsning (4.4.57). Her lar det seg gjøre å skrive y som en funksjon av x, men vi kan også bruke implisitt derivasjon. Vi gjør det siste, og finner

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 \\ \left(\frac{2}{25}x - \frac{2}{9}y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= 0 \\ \frac{2}{9}y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2}{25}x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{9x}{25y}. \end{aligned}$$

I $(25/3, 4)$ har da tangentlinjen stigningstall

$$\frac{9 \cdot \frac{25}{3}}{25 \cdot 4} = \frac{9}{4 \cdot 3} = \frac{3}{4},$$

mens normallinjen har stigningstall $-4/3$. Følgelig er tangentlinjen gitt av

$$f(x) = -\frac{4}{3}x + b$$

hvor $4 = f(25/3) = 75/12 + b \Rightarrow b = -9/4$, altså

$$f(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{9}{4}.$$

Konstantleddet for normallinjen beregnes på akkurat samme vis.

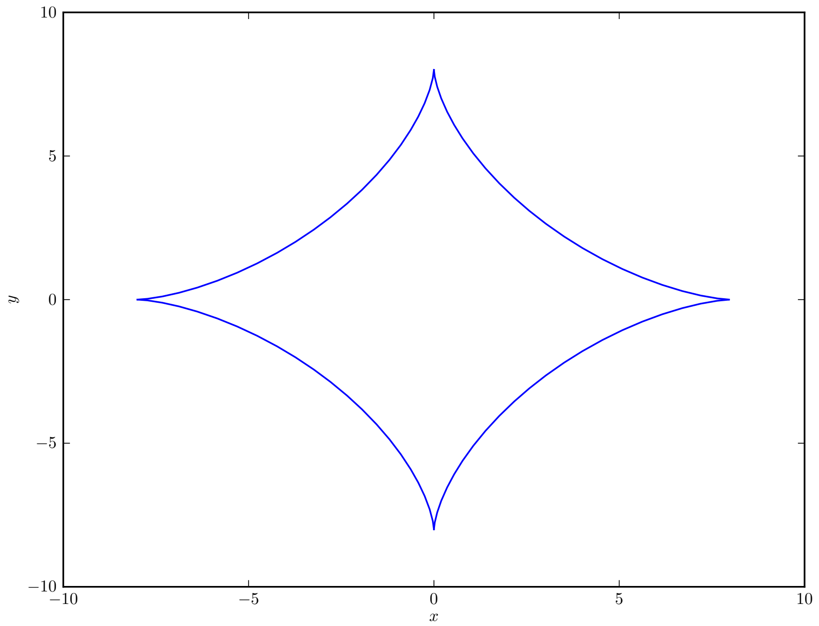
Løsning (4.4.59). a) Ved implisitt derivasjon finner vi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{2/3}+y^{2/3}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}4 \\
\frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}} + \frac{2}{3}\frac{1}{y^{1/3}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\frac{2}{3}\frac{1}{y^{1/3}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.
\end{aligned}$$

I punktet $(-1, 3\sqrt{3})$ har vi da

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-1,y=3\sqrt{3}} = -\frac{(3\sqrt{3})^{1/3}}{(-1)^{1/3}} = -\frac{3^{1/3}\cdot 3^{1/6}}{-1} = \sqrt{3}.$$

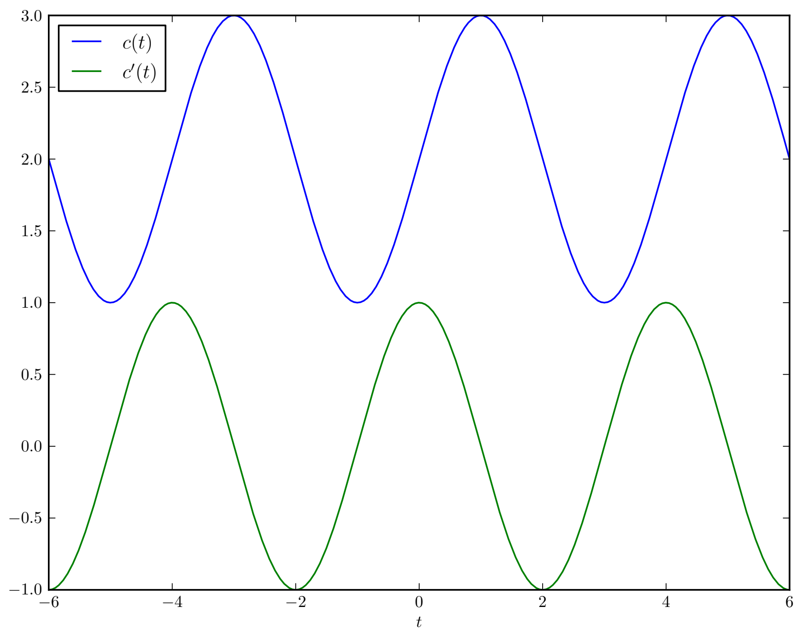
b) Se figur 1.



Figur 1: Plott av astroidekurven tilhørende oppgave 4.4.59b.

Løsning (4.5.73). a) Vi har ved kjerneregelen (se forrige LF for detaljer rundt bruk)

$$c'(t) = \frac{\pi}{2}\sin'\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$



Figur 2: Plott tilhørende oppgave 4.5.73.

b) Se figur 2.
c) Vi observerer følgende av figur 2:

i) Når c når sitt maksimum er c' null.

ii) Når c' er positiv er c økende.

iii) Når $c' = 0$ har c en topp eller en bunn.

Løsning (4.5.55). Ved kjerneregelen (se forrige LF for detaljert bruk) finner vi

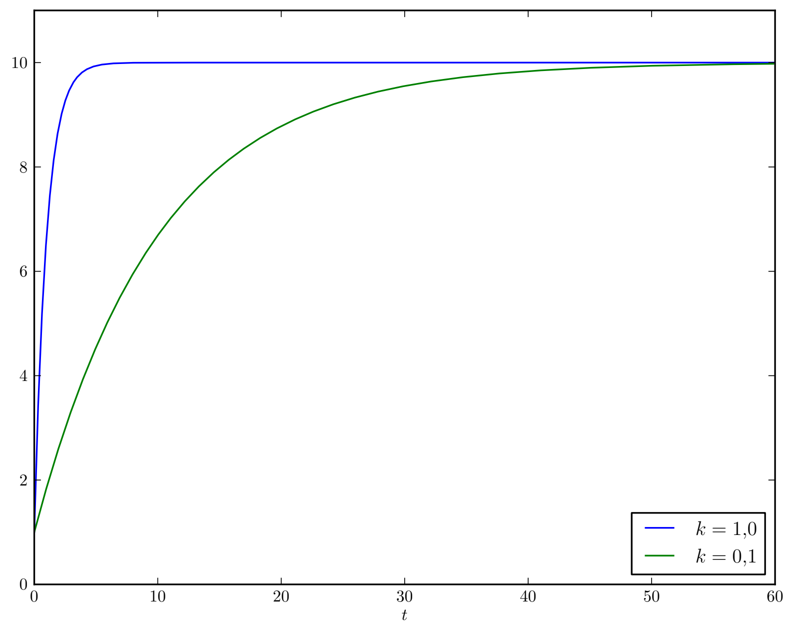
$$f'(x) = \tan' \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}.$$

Løsning (4.6.60). a) $N(0) = N_0$.
b) Vi har rett frem (se f.eks. eksempel 2, side 180, eller forrige LF)

$$N'(t) = rN_0 e^{rt} = rN(t).$$

Løsning (4.6.65). a) Se figur 3.
b) Vi observerer at

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = L_\infty - (L_\infty - L_0) \cdot 0 = L_\infty$$



Figur 3: Plott tilhørende oppgave 4.6.65a. Her er $L_\infty = 10$ og $L_0 = 1$.

og at

$$L(0) = L_\infty - (L_\infty - L_0) \cdot 1 = L_0.$$

Dermed tolker vi L_∞ som maksimal fiskestørrelse, og L_0 som fiskens størrelse ved fødsel.

c) Vi ser at fisken når $L = 5$ raskere med $k = 1$.

d) Utregningen er rett frem (se oppgave 4.6.60). At

$$L'(x) \propto L_\infty - L(x)$$

vil si at fisk vokser raskere jo lengre fra maksimumsstørrelsen L_∞ de er. Når størrelsen $L(x)$ nærmer seg maksimumsstørrelsen L_∞ blir veksten mindre, noe som gir den utflatende effekten vi ser i figur 3.

e) Som indikert i deloppgave c), vil en større k bety raskere fiskevekst.