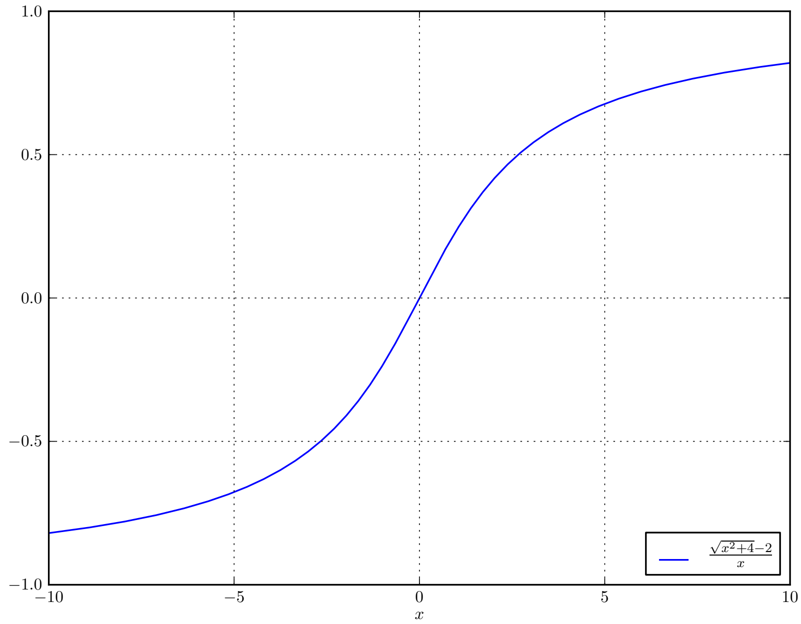
MA0001 høsten 2010
Løsningsforslag til øving 5

Gard Spreemann

4. oktober 2010
(oppdatert 5. oktober 2010)

Oppgavene er hentet fra læreboken i faget.

Løsning (3.1.30). Jeg tolker oppgaven dithen at en skal resonnere seg frem til en grenseverdi ved å plotte funksjonen. I så fall illustrerer figur 1 at grenseverdien er 0.



Figur 1: Plott tilhørende oppgave 3.1.30.

Løsning (3.1.49). Da grenseverdien til nevner er null, må vi først faktorisere. Vi merker oss at polynomet i teller har røtter $x = -1$ og $x = 3$, så

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3).$$

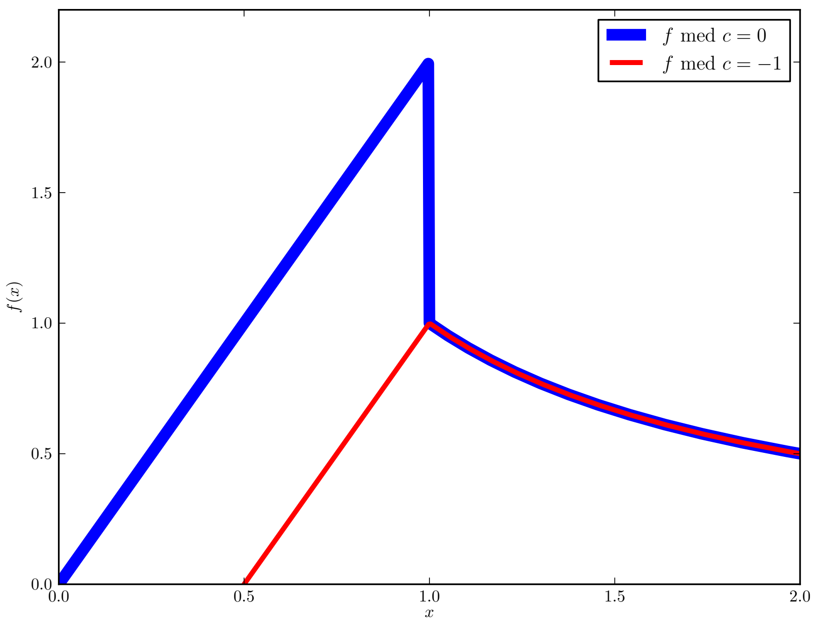
Vi finner da

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} x + 1 = 4.$$

Løsning (3.1.53). Da grenseverdien til nevner er null, må vi først faktorisere. Vi merker oss at polynomet i teller har røtter $x = -2$ og $x = 1/2$. Vi finner da

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x+2)(x - \frac{1}{2})}{x+2} = \lim_{x \to -2} 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = -5.$$

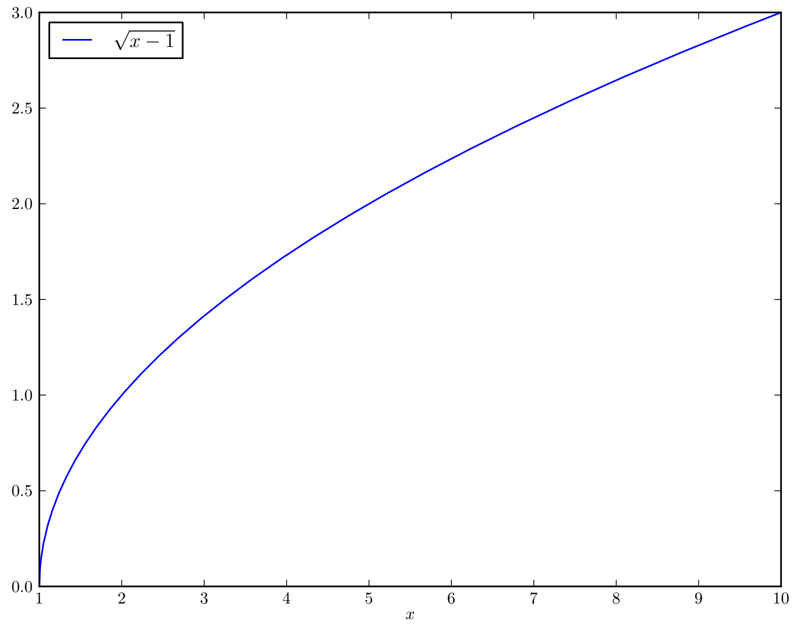
Løsning (3.2.26). a) Av figur 2 ser vi at f ikke er kontinuerlig med $c = 0$. Diskontinuiteten finner sted i punktet 1.



Figur 2: Funksjonen i oppgave 3.2.26 med $c = 0$ og med $c = -1$.

b) De to "halvdelene" av funksjonen er åpenbart kontinuerlig i sine domener, så det eneste problemet er punktet 1 der funksjonene overlapper. Da $1/x = 1/1 = 1$ her, må vi justere c slik at $1 = 2x + c = 2 \cdot 1 + c$, altså $c = -1$. Figur 2 illustrer at f er kontinuerlig med dette valget av c.

Løsning (3.2.27). a) Skriv f som komposisjonen $f = h \circ g$ hvor $h(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ $(x \geq 0)$ og $g(x) = x - 1$ (her definert for $x \geq 1$). Altså er f en komposisjon av to polynomfunksjoner, og vi vet at disse er begge kontinuerlige på sine domener (s. 106). Av teoremet på side 107[1] har vi da at f er kontinuerlig på $[1, \infty)$.



Figur 3: Funksjonen i oppgave 3.2.27b.

b) Se figur 3.

c) Nei. Domenet til f er $[1, \infty)$, så $f(x)$ er meningsløst for x til venstre for 1 slik funksjonen er definert. Der er heller ingen åpenbare utvidelser av f til dette området, da $x - 1 < 0$ for $x < 1$, og en dermed ville fått kvadratroten til et negativt tall.

Løsning (3.2.41). Merk at nevners grenseverdi er 0, så vi må være forsiktige. Ved faktorisering og grensereglene har vi

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x)^2 - 1^2}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} e^x + 1 = 2.$$

Andre likhet fremkommer ved konjugatsetningen, mens siste fremkommer ved kontinuitet av eksponensialfunksjonen.

Løsning (3.2.45). Merk at nevners grenseverdi er 0, så vi må være forsiktige.

[1]Hvorfor i h☠... nummererer ikke boken teoremene sine?

Ved litt triksing finner vi

$$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)} = \frac{x^2+9-9}{x^2\sqrt{x^2+9}+3x^2}$$
$$= \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2+9}+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}.$$

Nå finner vi lett grenseverdien:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}.$$

Løsning (3.2.47). Skriv $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ som $f = \ln \circ g$ hvor $g(x) = 1 - x$ (her definert for $x < 1$. Da er f er komposisjon av to kontinuerlige funksjoner, og grenseverdien i 0 er simpelthen $\ln(1-0) = \ln 1 = 0$.

Løsning (3.3.5). Merk at

$$\frac{1 - x^3 + 2x^4}{2x^2 + x^4} = \frac{\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x} + 2}{2\frac{1}{x^2} + 1},$$

så vi har

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x^3 + 2x^4}{2x^2 + x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x} + 2}{2\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{0 - 0 + 2}{2 \cdot 0 + 1} = 2.$$

Løsning (3.3.22). Da $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ er det klart at

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{1+e^{-x}} = 0.$$

Løsning (3.4.7). Vi ønsker å bruke de kjente trigonometriske grensene fra side 116, og omskriver med $y = 5x$

$$\frac{\sin 5x}{x} = \frac{\sin y}{y/5} = 5\frac{\sin y}{y}.$$

Da $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$, finner vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{y\to 0} 5\frac{\sin y}{y} = 5,$$

hvor siste overgang kommer fra den trigonometriske grensen (s. 116).

Løsning (3.4.10). Vi ønsker å bruke de kjente trigonometriske grensene fra side 116, og omskriver med $y = -\pi x/2$

$$\frac{\sin(-\frac{\pi}{2}x)}{2x} = \frac{\sin y}{-4\frac{y}{\pi}} = -\frac{\pi}{4}\frac{\sin y}{y}.$$

Da $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$, finner vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-\frac{\pi}{2}x)}{2x} = \lim_{y\to 0} -\frac{\pi}{4}\frac{\sin y}{y} = -\frac{\pi}{4},$$

hvor siste overgang kommer fra den trigonometriske grensen (s. 116).

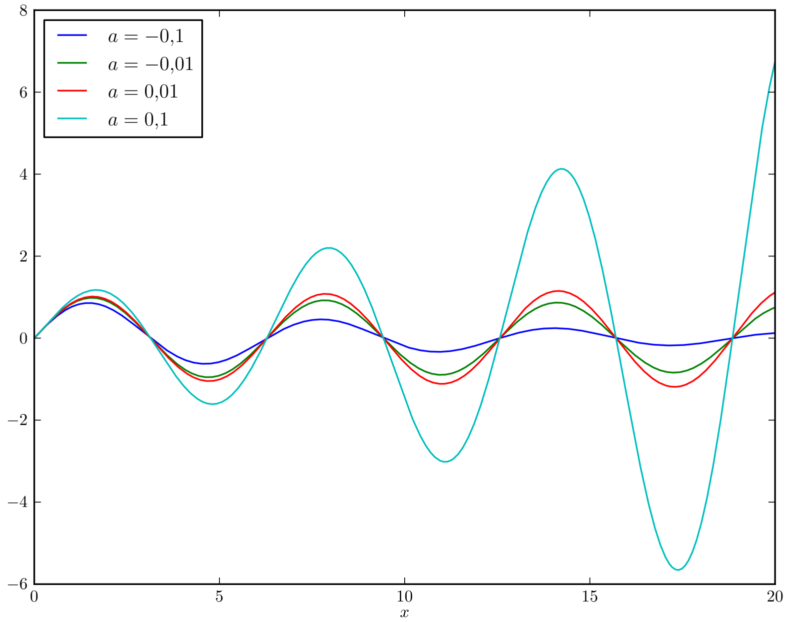
Løsning (3.4.20). Vi ønsker å bruke de kjente trigonometriske grensene fra side 116, og omskriver

$$\frac{\csc x - \cot x}{x \csc x} = \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1-\cos x}{x}.$$

Av den trigonometriske identiteten grensen på s. 116 finner vi da

$$\lim_{x\to 0} \frac{\csc x - \cot x}{x \csc x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Løsning (3.4.21). a) Se figur 4.



Figur 4: Plott tilhørende oppgave 3.4.21a.

b) Sinusfaktoren står for oscillasjonene, mens eksponensialfaktoren står for forsterkning/dempning.

c) Fortegnet til a avgjør om eksponensialfaktoren er dempning ($a < 0$) eller forsterkning ($a > 0$), mens størrelsen avgjør stryken på dempningen/forsterkningen (jo større tallverdi, jo større dempning/forsterkning).

d) Grafene er gitt i figur 5. Grafene viser tydelig i begge tilfeller at $g \leq f \leq h$. Når $a < 0$, vet vi at

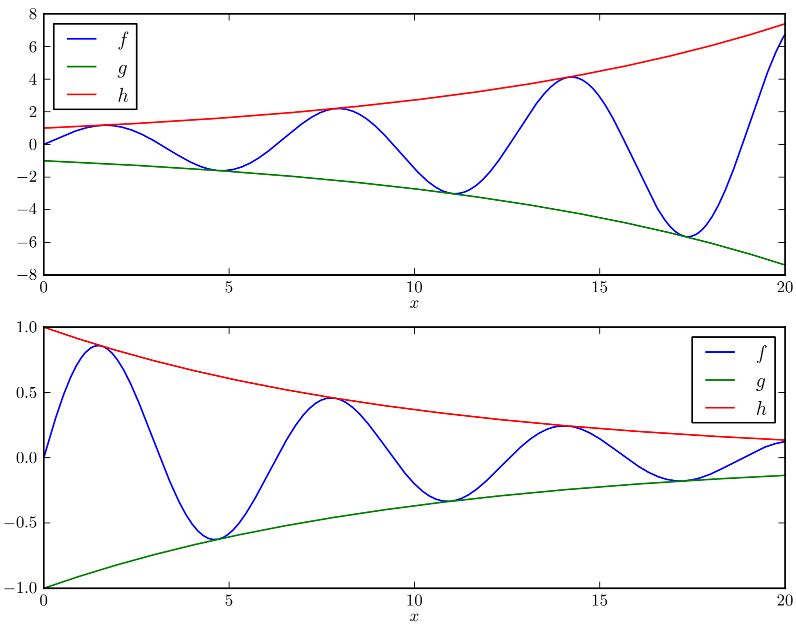
$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

og

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = 0.$$

Da gir skviseteoremet at

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$



Figur 5: Plott tilhørende oppgave 3.4.21d. **Øverst:** $a = 0{,}1$. **Nederst:** $a = -0{,}1$. Merk at de to vertikale aksene er skalert forskjellig!