MA0001 høsten 2010
Løsningsforslag til øving 3

Gard Spreemann

21. september 2010

Oppgavene er hentet fra læreboken i faget.

Løsning (1.2.85b). Vi bruker at $e^{\ln x} = x$ for alle x. Da har vi

$$4^{x^2-1} = e^{\ln(4^{x^2-1})} = e^{(x^2-1)\ln 4}.$$

Løsning (1.2.86d). Akkurat hva oppgaven her spør om er ikke helt klart, men det kan være[1]

$$\ln(2x^2-1) = \ln 2^{\log_2(2x^2-1)} = \log_2(2x^2-1)\ln 2$$

slik at

$$\log_2(2x^2-1) = \frac{\ln(2x^2-1)}{\ln 2}.$$

Løsning (1.2.87). Vi har ved logaritmens egenskaper at

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{\ln(1/2)^x} = e^{x\ln(1/2)} = e^{x\ln(2^{-1})} = e^{-x\ln 2},$$

så hvis vi setter $\mu = \ln 2$ ($\ln 2 \approx 0{,}69$), får vi funksjonen y på formen som er spurt om i oppgaven, altså $y(x) = e^{-\mu x}$.

Løsning (1.2.97). Vi leser av at f har amplitude 3. Sinus har i seg selv periode 2π, men i f multipliseres argumentet til sin med en faktor 4, noe som gir en 4 ganger kortere periode, altså $\pi/2$.

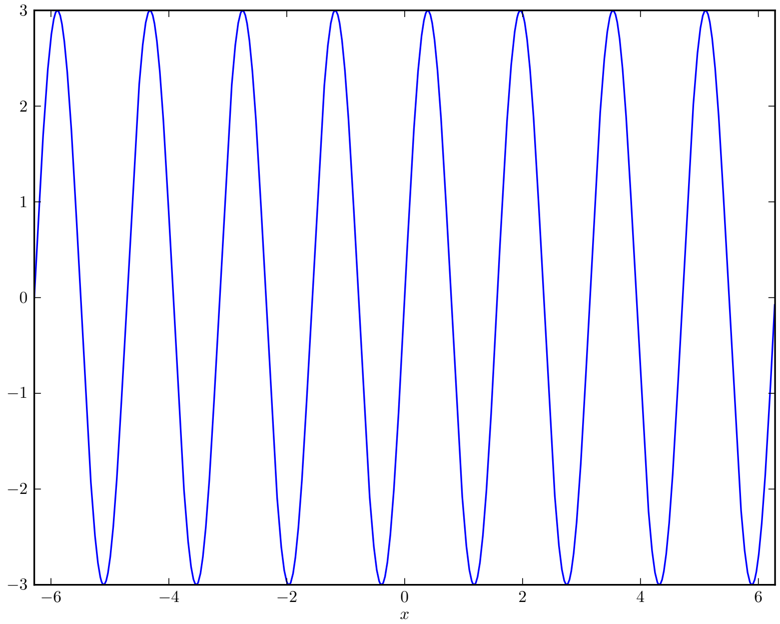
Se figur 1 for en plott av f som illusterer amplitude og periode.

Løsning (1.3.34). Vi skriver tallene på normalform:

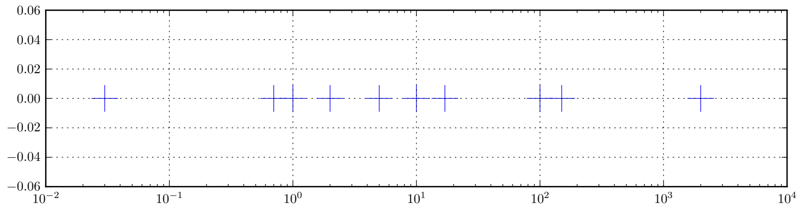
$$\begin{array}{rrr} 0{,}03 = 3\cdot 10^{-2} & 0{,}7 = 7\cdot 10^{-1} & 1 = 1\cdot 10^0 \\ 2 = 2\cdot 10^0 & 5 = 5\cdot 10^0 & 10 = 1\cdot 10^1 \\ 17 = 1{,}7\cdot 10^1 & 100 = 1\cdot 10^2 & 150 = 1{,}5\cdot 10^2 \\ 2000 = 2\cdot 10^3 & & \end{array}$$

Se figur 2 for plassering av disse tallene langs en logaritmisk tallinje.

[1] Takk til Roy Even Aune for dette forslaget, som i hvertfall er bedre enn mitt.



Figur 1: Plott tilhørende oppgave 1.2.97.



Figur 2: Tallene fra oppgave 1.3.34 langs en logaritmisk tallinje. **Ignorer den vertikale aksen i denne figuren;** den er der bare fordi figuren er laget litt fort og gæli.

Løsning (1.3.43). Vi ønkser først å finne en lineær sammenheng mellom x og $\ln y$, altså finne $a, b \in \mathbb{R}$ slik at $\ln y = ax + b$ går gjennom $(x_1, \ln y_1)$ og $(x_2, \ln y_2)$. Vi finner

$$a = \frac{\ln 1 - \ln 5}{3 - 0} = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{5}$$

og $b = \ln y_1 = \ln 5$. Dermed finner vi

$$y = e^{\ln y} = e^{\frac{1}{3}\ln(\frac{1}{5})x + \ln 5} = e^{-(\ln 5)x/3 + \ln 5}.$$

Løsning (1.3.49). Vi tar logartimen på begge sider av uttrykket og finner

$$\ln y = \ln 2 - 1{,}2x.$$

Løsning (1.3.57). Vi ønsker å finne en lineær sammenheng mellom $\ln x$ og $\ln y$, altså bestemme $a, b \in \mathbb{R}$ slik at $\ln y = a \ln x + b$ går gjennom $(\ln x_1, \ln y_1)$ og $(\ln x_2, \ln y_2)$. Vi finner

$$a = \frac{\ln 8 - \ln 2}{\ln 8 - \ln 4} = \frac{\ln \frac{8}{2}}{\ln \frac{8}{4}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2$$

og

$$\begin{aligned} &\ln y_1 = a \ln x_1 + b \Rightarrow \\ &b = \ln 2 - 2\ln 4 = \ln 2 - 2\ln 2^2 = \ln 2 - 4\ln 2 = -3\ln 2. \end{aligned}$$

Dermed har vi $\ln y = 2\ln x - 3\ln 2$, slik at

$$y = e^{\ln y} = e^{2\ln x - 3\ln 2} = e^{2\ln x} e^{-3\ln 2} = x^2 \cdot 2^{-3}.$$

Siden $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$, finner vi

$$y = \frac{1}{8}x^2.$$

Løsning (1.3.65). Vi tar logartimen på begge sider og finner

$$\ln y = \ln(4x^{-3}) = \ln 4 + \ln x^{-3} = \ln 4 - 3\ln x,$$

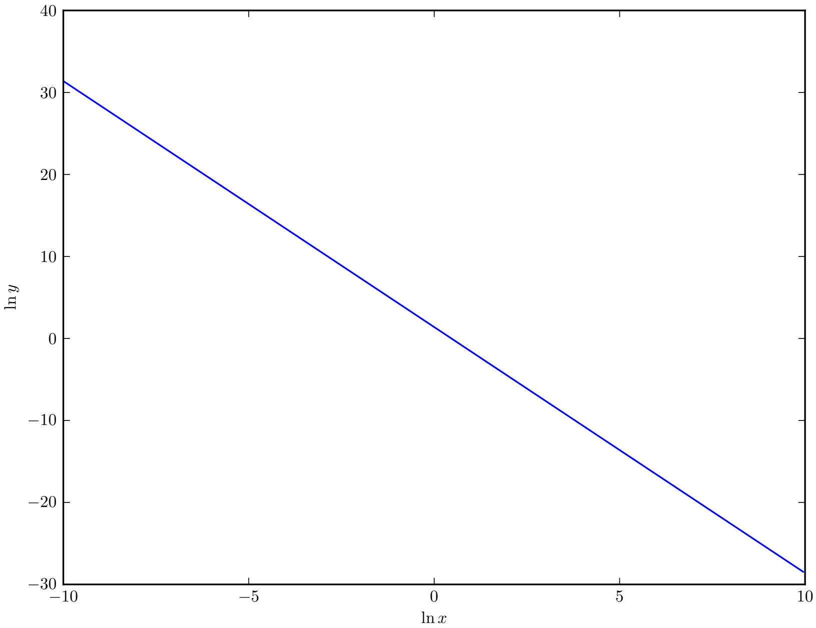
som er en lineær sammenheng mellom $\ln x$ og $\ln y$. Se også figur 3.

Løsning (1.3.75). Det er åpenbart en eksponentiell sammenheng som inngår, altså $y = ae^{bx}$, så vi prøver å finne $a, b \in \mathbb{R}$ slik at $\ln y = \ln a + bx$. La oss for enkelhets skyld ta utgangspunkt i det tredje og det siste punktet. Da finner vi

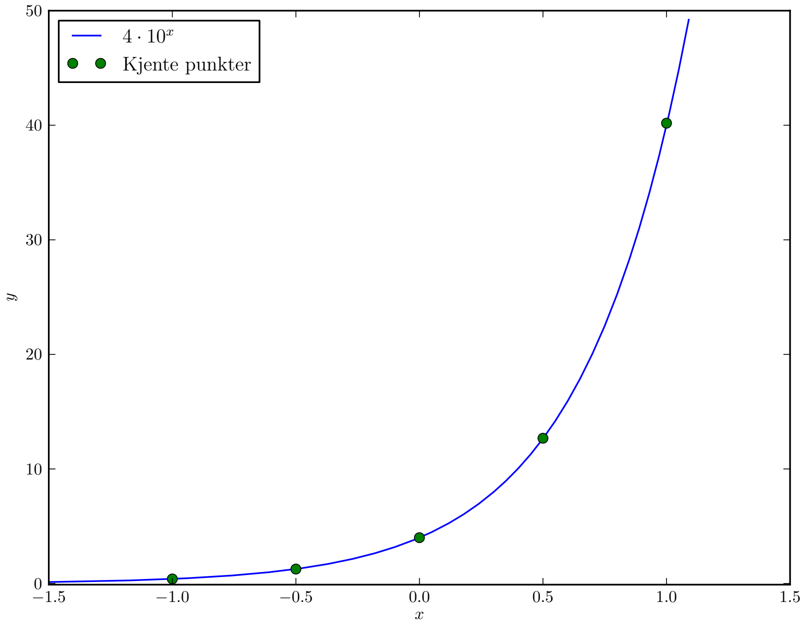
$$\ln 4 = \ln a + b \cdot 0 \Rightarrow a = 4.$$

Videre finner vi ved hjelp av det siste punktet at

$$\ln 40{,}18 = \ln 4 + 1b \Rightarrow b = \ln 40{,}18 - \ln 4 = \ln \frac{40{,}18}{4}.$$



Figur 3: Plott tilhørende oppgave 1.3.65.

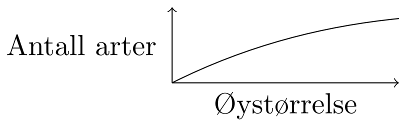


Figur 4: Plott tilhørende oppgave 1.3.75.

Hvis vi nå regner ut (potensielt litt forskjellige) verdier for a og b ved å bruke de andre punktene, og lukter at vi helst skal ha en litt fin sammenheng, kan vi kanskje gjette på at det kan være fint å si at $40{,}18/4 \approx 10$, slik at $b \approx \ln 10$, så vi får $ae^{bx} \approx a \cdot 10^x = 4 \cdot 10^x$.

Av figur 4 ser vi at dette stemmer utmerket.

Løsning (1.3.103). Se figur 5.



Figur 5: Skisse tilhørende oppgave 1.3.103.

Løsning (1.3.105). Løsningen bakerst i boken er fullstendig.

Løsning (1.3.111). Løsningen bakerst i boken er fullstendig.

Løsning (1.Review.2). **a)** Ved tiden 3 timer har vi $B(3) = 25000e^{-2\cdot 3} \approx 62$ bakterier igjen.

b) Vi finner T slik at $B(T)/B(0) = 0{,}01$:

$$0{,}01 = \frac{B(T)}{B(0)} = e^{-2T},$$

så $-2T = \ln 0{,}01$ og $T \approx 2{,}30$ timer.