MA0001 høsten 2010
Løsningsforslag til øving 2

Gard Spreemann

16. september 2010
(oppdatert 28. september 2010)

Oppgavene er hentet fra læreboken i faget.

Løsning (1.2.5b). Funksjonene f og g er ikke like: deres domener er forskjellig. f har domene $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (notasjon: de reelle tall bortsett fra null)[1] mens g har domene $\mathbb{R}$.

Løsning (1.2.6a). Når $x \geq 1$ er $x - 1 \geq 0$, så $x - 1 = |x - 1|$. Når $x \leq 1$ er $x - 1 \leq 0$, så $-(x - 1) = 1 - x = |x - 1|$. I tillegg er de to uttrykkene like når $x = 1$. Vi kan altså skrive

$$2|x-1| = \begin{cases} 2(x-1) & \text{for } x \geq 1 \\ 2(1-x) & \text{for } x \leq 1. \end{cases}$$

Løsning (1.2.6b). Når $0 \leq x \leq 1$ er $x - 1 \leq 0$, så $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$. Når $1 \leq x \leq 2$ er $x - 1 \geq 0$, så $|x - 1| = x - 1$, så som i oppgave 1.2.6a kan vi skrive

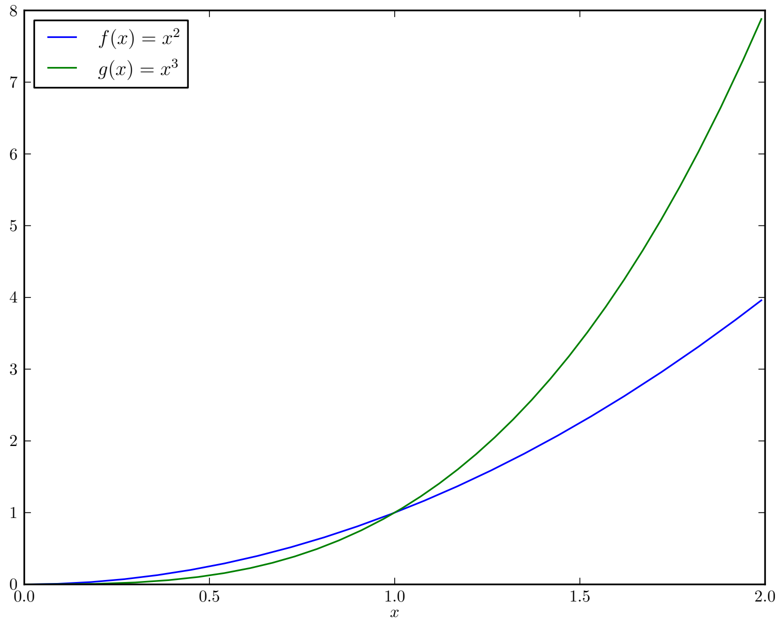
$$g(x) = 2|x-1| = \begin{cases} 2(1-x) & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 2(x-1) & \text{for } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Dette er nøyaktig uttrykket for f. Vi konkluderer med at $f = g$.

Løsning (1.2.17). f er strengt voksende og ubegrenset, og tar sin minste verdi når $x = 3$, så kodomenet til f er $[f(3), \infty) = [27, \infty)$. Vi har altså $f : [3, \infty) \to [27, \infty)$. g er også strengt voksende og ubegrenset, og tar sin minste verdi når $x = 0$, så kodomenet til g er $[g(0), \infty) = [0, \infty)$. Vi har altså $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$.

Dersom vi skal kunne danne $f \circ g$, må vi altså restriktere domenet til g slik at kodomenet blir det samme som domenet til f, altså $[3, \infty)$. Minste tillatte argument til g må da være $x_{\min}$ slik at $\sqrt{x_{\min}} = 3$, altså $x_{\min} = 3^2 = 9$. Vi definerer da $f \circ g : [9, \infty) \to [27, \infty)$, og har

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = 3\left(\sqrt{x}\right)^2 = 3x.$$



Figur 1: Løsning for oppgave 1.2.25a i området $0 \leq x \leq 2$.

Løsning (1.2.25a). Se figur 1.

Løsning (1.2.25b). Vi har $0 \leq x \leq 1$. Ved å multiplisere begge sider av ulikheten med x^2 har vi

$$0 \leq x^3 \leq x^2$$

som ønsket.

Løsning (1.2.25c). Vi har $x \geq 1$. Som i oppgave 1.2.25b multipliserer vi med x^2 og finner $x^3 \geq x^2$.

Løsning (1.2.29). a) Har fra oppgaveteksten $R(x) = k(3-x)(4-x)$ og $R(1) = 9$. Altså

$$9 = R(1) = k(3-1)(4-1) = k \cdot 2 \cdot 3 = 6k,$$

slik at $k = 9/6 = 3/2$. Dermed har vi

$$R(x) = \frac{3}{2}(a-x)(b-x).$$

[1]Generelt: For mengder A og B betyr $A \setminus B$ mengden bestående av alle punkter fra A bortsett fra de som er i B.

b)[2] Da faktorene $a-x$ og $b-x$ sier hvor mye konsentrasjon som er igjen av A og B når x har reagert, er det klart at ligningen bare gir mening så lenge disse faktorene er ikke-negative. $a-x \geq 0 \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$. Videre er det klart at konsentrasjonen til AB, gitt av x, også må være ikke-negativ, så vi finner at domenet til R er $[0,3]$.

Løsning (1.2.37). Graftegningsoppgave som besvarer seg selv.

Løsning (1.2.43). Forholdet mellom $r(0{,}2)$ og $r(0{,}1)$ er

$$\frac{r(0{,}2)}{r(0{,}1)} = \frac{5\frac{0{,}2}{1+0{,}2}}{5\frac{0{,}1}{1+0{,}1}} = \frac{0{,}2}{1+0{,}2}\frac{1+0{,}1}{0{,}1} = \frac{0{,}2\cdot 1{,}1}{1{,}2\cdot 0{,}1} \approx 1{,}83,$$

en økning på ca. 83%. Tilsvarende er forholdet mellom $r(20)$ og $r(10)$

$$\frac{r(20)}{r(10)} = \frac{5\frac{20}{1+20}}{5\frac{10}{1+10}} = \frac{20}{1+20}\frac{1+10}{10} = \frac{20\cdot 11}{21\cdot 10} = \frac{22}{21} \approx 1{,}05,$$

som er en økning på kun ca. 5%.

Løsning (1.2.53). Graftegningsoppgave som besvarer seg selv.

Løsning (1.2.59). Radioaktivt materiale følger

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}, \tag{1}$$

hvor $m(t)$ er massen etter en tid t, m_0 er massen ved tid 0, og $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$, hvor $T_{1/2}$ er halveringstiden. For $m_0 = 20\mu\text{g}$ C^{14} med $T_{1/2} = 5730$ år har vi altså

$$m(2000\text{ år}) = (20\mu\text{g}) \cdot e^{-\ln 2\cdot(2000\text{ år})/(5730\text{ år})} \approx 16\mu\text{g}.$$

Løsning (1.2.63). **a)** Fra ligning (1) med $T_{1/2} = 140$ dager og $m_0 = 300\mu\text{g}$ har vi

$$m(t) = (300\mu\text{g}) \cdot e^{-\ln 2\cdot t/(140\text{ dager})}$$

b) Vi vil altså løse $m(t) = 0{,}2\cdot m(0) = 0{,}2\cdot m_0$ for t. Vi deler på m_0 og får

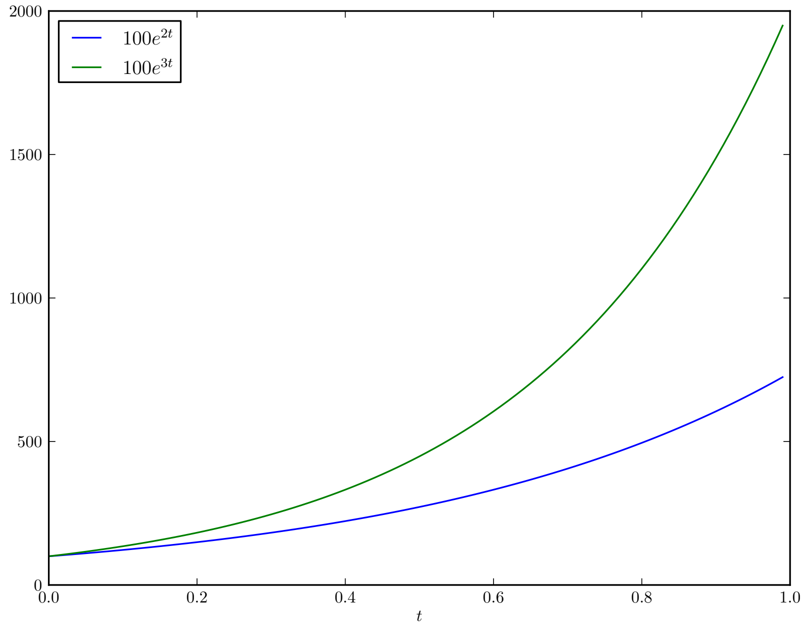
$$0{,}2 = e^{-\ln 2\cdot t/(140\text{ dager})} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-t/(140\text{ dager})} = 2^{-t/(140\text{ dager})},$$

hvor siste likhet fremkommer av logaritmens egenskaper. Ved så å ta logaritmen igjen får vi

$$\begin{aligned} 2^{-t/(140\text{ dager})} &= 0{,}2 \\ -\frac{t}{140\text{ dager}}\ln 2 &= \ln 0{,}2 \\ t &= -\frac{\ln 0{,}2}{\ln 2}\cdot 140\text{ dager} \\ t &\approx 325\text{ dager} \end{aligned}$$

[2] Takk til studass Øystein Utsogn som rettet feil i løsningen til denne oppgaven.

Løsning (1.2.64). Dette er en kopi av 1.2.63b med verdiene for $T_{1/2}$ og m_0 byttet ut. Et godt eksempel på at det kan lønne seg å regne symbolsk istedet for å sette inn tall (slik jeg dessverre gjorde over).



Figur 2: Grafene i oppgave 1.2.67a.

Løsning (1.2.67a). Av figur 2 ser vi klart at funksjonen med $r = 3$ vokser raskest.

Løsning (1.2.67b). Se på

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{N_0 e^{r(t+1)}}{N_0 e^{rt}} = e^{r(t+1)-rt} = e^r.$$

Altså finner vi r ved å ta logaritmen, nemlig

$$r = \ln \frac{N(t+1)}{N(t)}.$$

I oppgaven har vi målt populasjonen til å være 200 ved en tid T og 250 ved en tid $T+1$. Vi finner da

$$r = \ln \frac{N(T+1)}{N(T)} = \ln \frac{250}{200} \approx 0{,}223.$$

Løsning (1.2.81d). [3] Siden logaritmen som inngår er med grunntall 2, ønsker vi å skrive $4 = 2^2$. Da har vi, siden $2^{\log_2 x} = x$,

$$4^{-\log_2 x} = \frac{1}{4^{\log_2 x}} = \frac{1}{(2^2)^{\log_2 x}} = \frac{1}{(2^{\log_2 x})^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Løsning (1.2.83b). Dersom uttrykket vårt bare skal være gyldig for $x > 0$, kan vi rett frem skrive

$$\ln x^4 - \ln x^{-2} = 4 \ln x - (-2) \ln x = 6 \ln x.$$

Her antar vi $x > 0$, som strengt tatt ikke er nødvendig for venstre side! Se oppdatering under.

Oppdatering etter tips fra årvåken student: Logaritmer er kun definert for positive tall. Dersom $x > 0$ i oppgaven, er ikke dette noe problem, men her er begge potensene som inngår (x^4 og x^{-2}) partallspotenser, og følgelig positive *også når* $x < 0$. Dermed er uttrykket i oppgaven meningsfullt også for $x < 0$, men da må vi passe på bruken av logaritmelovene! Vi skriver

$$\ln x^4 - \ln x^{-2} = \ln |x|^4 - \ln |x|^{-2} = 4 \ln |x| - (-2) \ln |x| = 6 \ln |x|,$$

som er gyldig for alle reelle $x \neq 0$.

[3] Oppdatering: Her mangler det visst et to-tall…