**Eksamen 13.12.2022** **IMAx Matematiske metoder 3**
**Eksamenstid 4 timer** *Bokmål*

## Oppgave 1.

En parametrisk kurve $C$ som beskriver banen til en partikkel som beveger seg i rommet er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) \;=\; \begin{pmatrix} t^2 \\ t-3 \\ \frac{2}{3}t^3 \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0\,.$$

Noen formler:

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,, \quad \hat{\mathbf{B}}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}\,, \quad \hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}}\times\hat{\mathbf{T}}\,, \quad \kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

(a) Finn hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ og akselerasjonen $\mathbf{r}''(t)$ til $C$ ved tidspunkt $t = 1$.

(b) Bruk hastigshetsvektoren og akselerasjonen for å regne ut enhetstangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}$ og binormalen $\hat{\mathbf{B}}$ til $C$ når $t = 1$.

(c) Finn krumningen $\kappa$ til $C$ når $t = 1$.

*Løsning.* Vi har

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t^2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4t \end{bmatrix}.$$

Dermed får vi

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}'' = \mathbf{r}''(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}'\times\mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 \\ -2\cdot 4 + 2\cdot 2 \\ -2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$|\mathbf{r}'| = \sqrt{4+1+4} = 3\,, \qquad |\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''| = \sqrt{16+16+4} = 6\,,$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Til slutt får vi

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}\,.$$

## Oppgave 2.

Dette er en oppgave med flervalgsspørsmål. Det er tre delspørsmål med et riktig svar per spørsmål. Du blir ikke trukket for feil svar.

Vi har oppgitt en funksjon $z = h(x, y)$ som beskriver høyden over havet på et kart som ligger i $xy$-planet. Vi antar at funksjonen har kontinuerlige partiellderiverte.

(a) I punktet $(x, y) = (1, 2)$ så er gradienten til funksjonen $h$ lik $\nabla h = (3, 4)$. Hva er den retningsderiverte til funksjonen i retningen sør-øst fra punktet $(1, 2)$? Dvs. hva er stigningstallet til landskapet i retningen sør-øst sett fra $(1, 2)$? Velg ett alternativ.

(b) Regn ut enhetstangentvektor til høydekurven gjennom punktet $(x, y) = (1, 2)$. Velg ett alternativ.

(c) Høyden i punktet $(1, 2)$ er $h(1, 2) = 100$. Bruk informasjonen gitt over og lineær tilnærming til å finne tilnærmet høyde i punktet $(1.1, 1.95)$.

*Løsning.* a) Retning sør-øst betyr $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. For å beregne den retningsderverte i retning $\mathbf{v}$ må vi finne

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Altså

$$D_{\mathbf{u}}\, h(1, 2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Gradienten er normalt på nivåkurven, så tangentvektorene er $\pm \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Enhetstangentvektorene har lengde 1 og er lik

$$\pm \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

c) Lineær tilnærming:

$$\begin{aligned} h(1.1, 0.95) \approx & h(1, 2) + \nabla h(1, 2) \cdot \begin{bmatrix} 1.1 - 1 \\ 1.95 - 2 \end{bmatrix} \\ =& 100 + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.05 \end{bmatrix} \\ =& 100 + 0.3 - 0.2 = 100.1\,. \end{aligned}$$

## Oppgave 3.

(a) Regn ut dobbeltintegralet $\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} (4 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$ ved hjelp av polarkoordinater. Tegn en figur som beskriver området det blir integrert over.

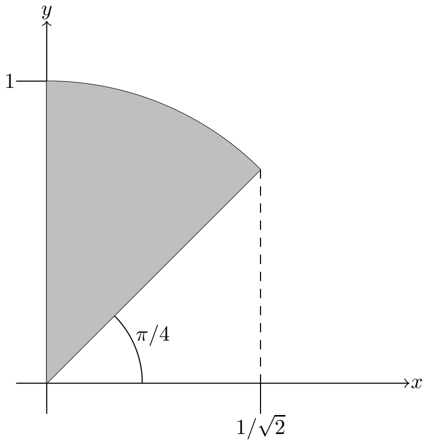
(b) Integralet $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}} r^4 \sin(\theta)\, dr\, d\theta$ er gitt i polarkoordinater. Gjør om integralet til kartesiske koordinater. Du skal ikke regne ut integralet. Tegn en figur som beskriver området det blir integrert over.

*Løsning.*

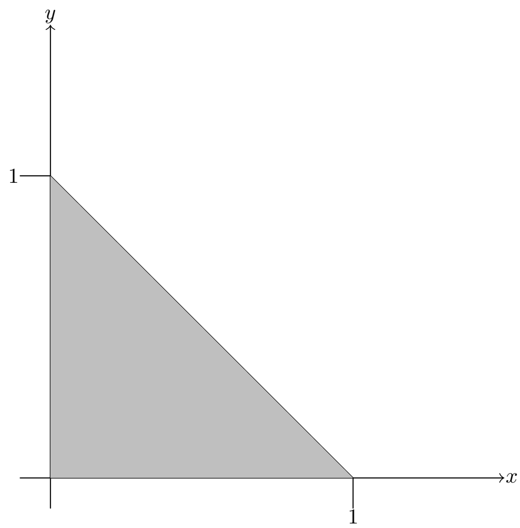
(a) (i) Området er tegnet i Figur 1.

(ii)

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} (4 - x^2 - y^2)\, dy\, dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 (4 - r^2) r\, dr\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{7\pi}{16} \end{aligned}$$




Figur 1: Område det blir integrert over i oppgave 3 (a)




Figur 2: Område det blir integrert over i oppgave 3 (b)

(b) (i) Området er tegnet i Figur 2.

(ii) Siden

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)} &= r && \Leftrightarrow \\ r\cos(\theta)+r\sin(\theta) &= 1 && \Leftrightarrow \\ x+y &= 1 \end{aligned}$$

Så integrerer vi i første kvadranten ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) under linjen $y = 1 - x$, og

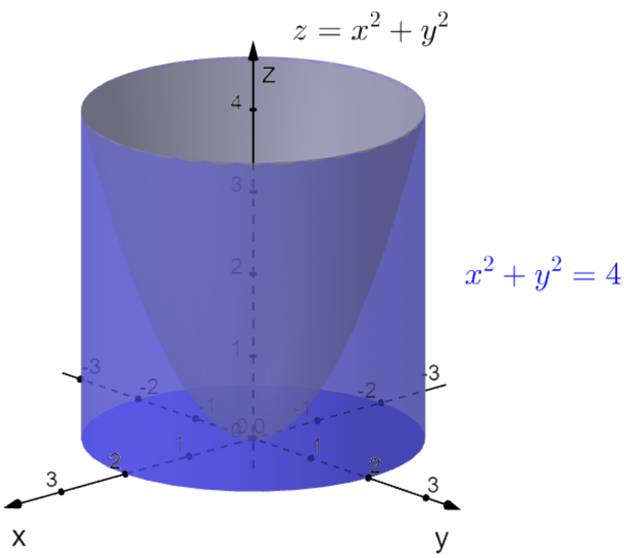
$$\begin{aligned} r^3\sin(\theta) &= (x^2+y^2)y, \\ r\,dr\,d\theta &= dx\,dy \end{aligned}$$

så blir integralet

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}} r^4\sin(\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^1\int_0^{1-x}(x^2+y^2)y\,dy\,dx$$

## Oppgave 4.

La $T$ være legemet avgrenset av sylinderen $x^2 + y^2 = 4$, paraboloiden $z = x^2 + y^2$ og planet $z = 0$. Legemet ligger innenfor sylinderen og utenfor paraboloiden (se Figur 3).




Figur 3: Legeme i oppgave 4

Legemet har uniform tetthet $\rho = 1$. Du skal finne tyngdepunktet til legemet $T$ ved å svare på følgende oppgaver:

(a) Sett opp et integral for å finne massen $m$ til legemet. Du trenger ikke regne ut integralet. Bruk sylinderkoordinater og gi opp integrasjonsgrenser for alle variabler.

(b) Anta at massen til legemet er $m = 8\pi$. Bruk dette og sylinderkoordinater for å beregne $z$-koordinaten til tyngdepunktet til $T$ som er gitt ved

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_T z\, \rho \, dV\,.$$

(c) Forklar, hvorfor $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

*Løsning.* (a) Mulige $(x, y)$-verdier: $(x, y) \in D$, hvor $D$ er sirkelskiven med sentrum i origo og radius 2. For hver $(x, y)$-verdi er $0 \leq z \leq x^2 + y^2$. Ettersom vi bruker sylinderkoordinater, er $dV = r\ dz\, dr\, d\theta$.

Tilsammen: $m \ = \ \iint_T \rho dV \ = \ \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} \ r\, dz\, dr\, d\theta.$

(b) Med integrasjonsgrensene fra (a) får vi

$$
\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{m}\iiint_T z\,\rho\,dV \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} zr\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[\frac{1}{2}z^2r\right]_0^{r^2} dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{2}r^5\,dr\,d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\cdot 6}r^6\right]_0^2 d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}2^6\,d\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}2^4 \;=\; \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}
$$

(c) $\bar{x} = \dfrac{1}{m}\iiint_T x\,dV\; = 0$ og $\bar{y} = \dfrac{1}{m}\iiint_T y\,dV\; = 0$, fordi $f(x,y,z) = x$ og $g(x,y,z) = y$ er odde funksjoner og $T$ er symmetrisk om planet $x = 0$ og om planet $y = 0$.

*Alternativt:* $T$ er et rotasjonslegeme om $z$-aksen / symmetrisk om $xz$- og $xy$-planet. Derfor ligger tyngepunktet på $z$-aksen og $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

## Oppgave 5

(a) Vi har et vektorfelt $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ y^2+2yz \\ x+y+z \end{pmatrix}$. Regn ut divergensen $\nabla\cdot\mathbf{F}$ til feltet og kryss av for riktig svar.

(b) Regn ut rotasjonen $\nabla\times\mathbf{F}$ til feltet fra a) og kryss av for riktig svar.

(c) Vektorfeltet $\mathbf{G}$ definert i hele rommet $\mathbb{R}^3$ er konservativt. Kryss av det utsagnet under som ikke alltid er riktig. Velg ett alternativ:

1. Det finnes en trevariabel funksjon $h(x,y,z)$ slik at feltet $\mathbf{F}$ er gradienten til $h$.
2. Rotasjonen til feltet er lik nullvektor.
3. Divergensen til feltet er lik 0.
4. Arbeidsintegralet rundt en sirkel med radius 1 og sentrum i origo er lik 0.

*Løsning.* a)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{F} =& \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2+2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y+z) \\
=& 2x + 2y + 2z + 1\,.
\end{aligned}
$$

b)

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2+y^2+z^2) & (y^2+2yz) & (x+y+z) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(x+y+z) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2+2yz) \\ -\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2+2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2y \\ -1+2z \\ -2y \end{bmatrix}$$

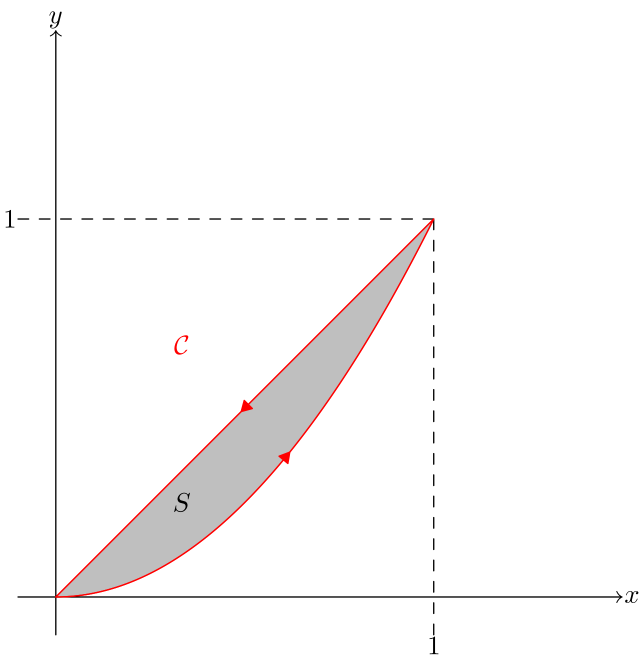
c) Det er alternativ 'Divergensen til feltet er lik 0.' som ikke alltid er riktig. For eksempel er gravitasjonsfeltet konservativt, men divergensen er ikke lik 0. Alternativene 1, 2 og 4 er egenskaper til konservative vektorfelt og $h$ er potensialet til $\mathbf{F}$.

## Oppgave 6.

La $S$ være området i $xy$-planet som ligger over $y = x^2$ og under $y = x$ (se Figur 4). Hvis $\mathcal{C}$ er randen til $S$ orientert mot klokken og $\mathbf{F} = (x-y, x+y)$ beregn:

(a) integralet $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ved å bruke Greens teorem

(b) integralet $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ uten å bruke Greens teorem




Figur 4: Område i oppgave 6

*Løsning:*

(a) Greens teorem gir

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y)\right) dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2\,dy\,dx = \int_0^1 [2y]_{x^2}^{x}\,dx \\
&= \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(b) Vi kan dele opp $\mathcal{C}$ i to deler: $\mathcal{C}_1$ parametrisert av

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2) \qquad 0 \le t \le 1$$

og $\mathcal{C}_2$ parametrisert av

$$\mathbf{r}(t) = (t, t) \qquad 0 \le t \le 1.$$

Men her har $\mathcal{C}_2$ omvendt orientering sammenlignet med $\mathcal{C}$ så integralet blir

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^1 (t - t^2, t + t^2)\cdot(1, 2t)\,dt - \int_0^1 (t - t, t + t)\cdot(1,1)\,dt \\
&= \int_0^1 -t + t^2 + 2t^3\,dt = \left[-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^4}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

## Kommentarer til retting:

Alle hele oppgaver teller likt og blir gitt en skår på inntil 10 poeng. Innenfor hver oppgave så er det opp til sensor å vurdere poengfordelingen, men inndelingen i a), b) og c) kan sees på som veiledende. Det er altså 60 oppnåelige poeng for eksamen totalt.

Små regnefeil som f.eks. fortegnsfeil og følgefeil som ikke trivialiserer problemet skal det trekkes 1/10 poeng for. Vi ønsker å vurdere forståelse, slik at regnefeil ilegges mindre vekt.

Besvarelser må vurderes som riktige/feil uavhengig av løsningsforslaget. Med andre ord, et svar kan godt være korrekt uten at fremgangsmåten følger løsningsforslaget. Bruk av forenklinger (som symmetri, tyngdepunktsbetraktninger, o.l.) i utregning av integraler blir sett på som positivt.

På de skriftlige oppgavene så skal både scantronark og svarfelt sjekkes. På de automatisk rettede oppgavene så er det et krav å undersøke om det er lagt ved scantronark. I såfall er det mulig å justere poengsummen manuelt.