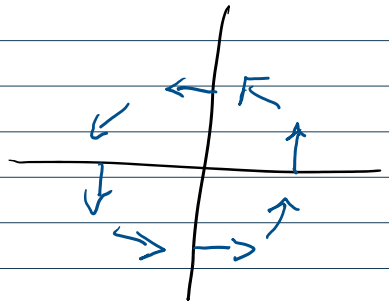
(6) Vi kan skille et tilsvarende synspunkt for rotasjon:

Når er

$$\vec{F}(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})(-y,x)$$

rotasjonsfri på $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$?



$$\operatorname{curl}\vec{F} = \partial_x\left[f(\sqrt{x^2+y^2})\,x\right] - \partial_y\left[f(\sqrt{x^2+y^2})(-y)\right]$$

$$= \left[f'(\cdot)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}x + f(\cdot)\right] + \left[f'(\cdot)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}y + f(\cdot)\right]$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\,f'(\sqrt{x^2+y^2}) + 2f(\sqrt{x^2+y^2})$$

f må altså løse $tf'(t) + 2f(t) = 0$ for $t>0$

$$= (t^2 f(t))'$$

Så $f(t) = \frac{C}{t^2}$ og derfor $\vec{F}(x,y) = C\frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$

Vi har allerede sett dette ($C=1$) som et eksempel på et vektorfelt som ikke er konservativt, selv om det er rotasjonsfritt.

(Forklaringen er at $\mathbb{R}^2\setminus\{\vec{0}\}$ er ikke enkeltsammenhengende)

Dette er samme form som magnetfeltet man ville fått dersom z-aksen ledet konstant strøm.