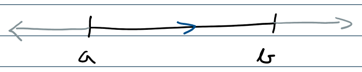
IMAT2100 Matematiske metoder 3

Fredag 5/11-21 08:15-10:00

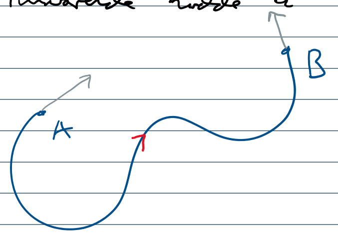
Analysens fundamentalteorem:



$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b)-f(a)$$

Vi kan tenke på dette som at integralet av f' over $[a,b]$ er summen av f på randen $\{a,b\}$, vektet med retning

Tilsvarende hadde vi også:

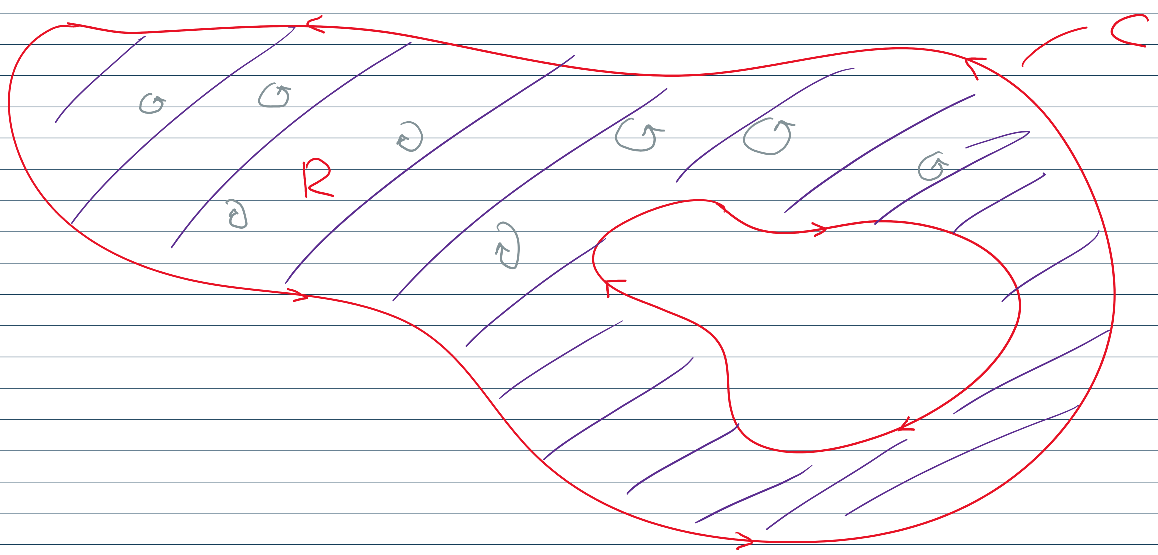


$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B)-\varphi(A)$$

for konservative vektorfelt.

Greens teorem (17.3)

Vi befinner oss nå i planet (rommet i neste uke)



Vi har et lukket område $R\subset\mathbb{R}^2$, hvor randen $C=\partial R$ er orientert akkurat som om R var en flate i xy-planet med $\hat{N}=\hat{k}$ (Høyrehåndsregel)

På R har vi et vektorfelt $\vec{F}$

Siden rotasjonen $\operatorname{curl}\vec{F} = \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \left(=(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{k}\right)$ beskriver sirkulasjonstetthet er det

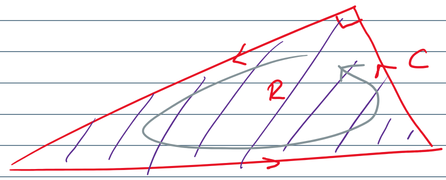
[illegible]

Siden rotasjonen $\text{curl}\,\vec{F} = \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \left(= (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k}\right)$ beskriver sirkulasjonstetthet er det naturlig å tenke at "summen" av rotasjonen i R burde kunne knyttes til sirkulasjonen rundt C:

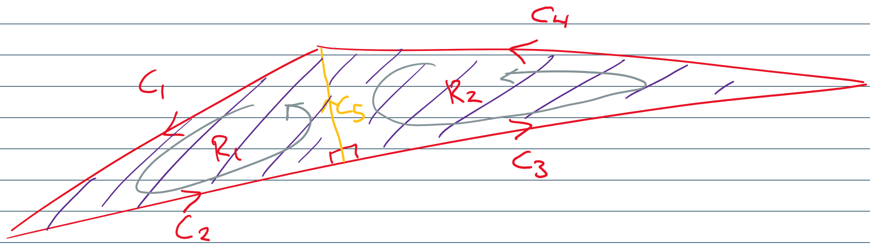
Greens teorem: Hvis $\vec{F}$ er glatt og C består av et endelig antall glatte lukkede kurver er

$$\iint_R \underbrace{\text{curl}\,\vec{F}}_{\text{Sirkulasjons-tetthet}}\, dA = \underbrace{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Sirkulasjon}} = \oint \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds \qquad d\vec{r} = \hat{T}\, ds$$

Skisse: Anta først at dette stemmer dersom R er en rettvinklet trekant:



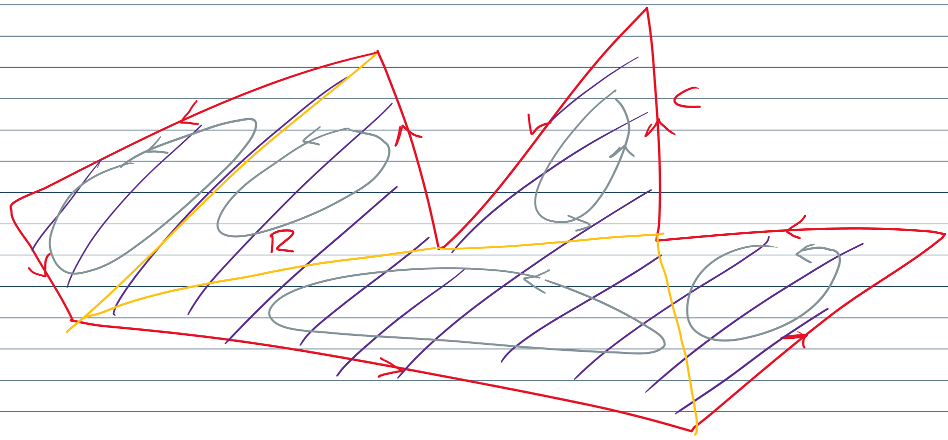
Da vil det stemme på alle trekanter:



$$\int_{R_1} \text{curl}\,\vec{F}\, dA = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_5}\right) \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \int_{R_2} \text{curl}\,\vec{F}\, dA = \left(\int_{C_3} + \int_{C_4} - \int_{C_5}\right) \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

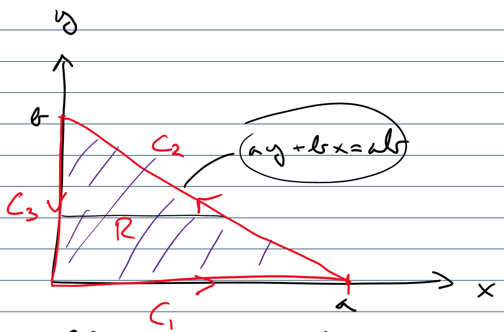
$$\iint_R \text{curl}\,\vec{F}\, dA = \left(\iint_{R_1} + \iint_{R_2}\right) \text{curl}\,\vec{F}\, dA = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}\right) \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Men da er det sant på alle polygoner, siden de kan deles inn i trekanter



Til slutt approksimerer man generell R med polygoner.

Hvorfor rand på rettvinklede trekanter?



La oss sjekke at integralene er like!

$$\iint_R \operatorname{curl} \vec{F}\, dA = \iint_R (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dA = \iint_R \partial_x F_2\, dA - \iint_R \partial_y F_1\, dA$$

$$= \int_0^b \int_0^{a - \frac{a}{b}y} \partial_x F_2\, dx\, dy - \int_0^a \int_0^{b - \frac{b}{a}x} \partial_y F_1\, dy\, dx$$

$$= \int_0^b \left(F_2\left(a - \tfrac{a}{b}y, y\right) - F_2(0,y) \right) dy - \int_0^a \left(F_1\left(x, b - \tfrac{b}{a}x\right) - F_1(x,0) \right) dx$$

$$x = a - \tfrac{a}{b}y \qquad dx = -\tfrac{a}{b}dy$$

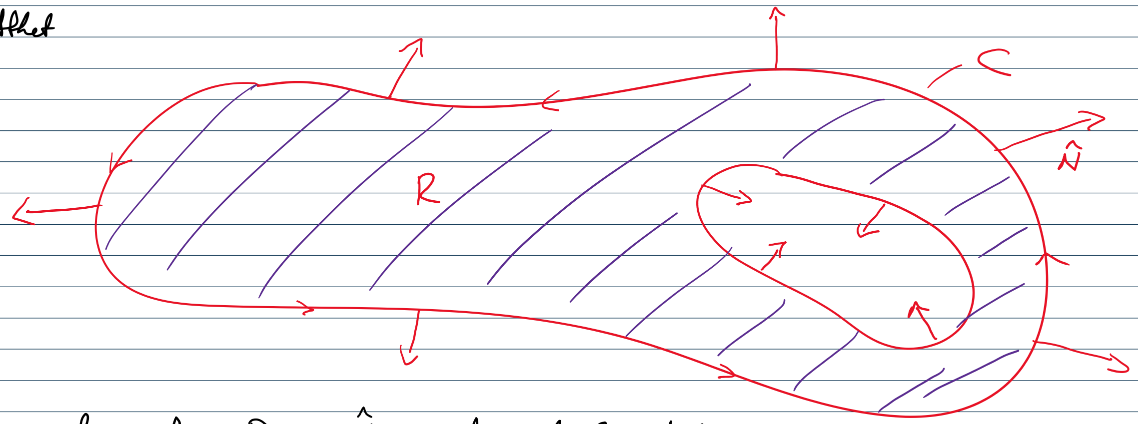
$$= \int_0^a F_1(x,0)\, dx + \int_0^a \left(F_2\left(x, b - \tfrac{b}{a}x\right)\tfrac{b}{a} - F_1\left(x, b - \tfrac{b}{a}x\right) \right) dx - \int_0^b F_2(0,y)\, dy$$

$$= \int_0^a \vec{F}(x,0)\cdot(1,0)\, dx - \int_0^a \vec{F}\left(x, b - \tfrac{b}{a}x\right)\cdot\left(1, -\tfrac{b}{a}\right) dx - \int_0^b \vec{F}(0,y)\cdot(0,1)\, dy$$

$$= \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

En annen variant av det samme fenomenet viser at vi kan gjøre det samme med fluks-

En annen variant av det samme teoremet sier at vi kan gjøre det samme med fluks-tetthet

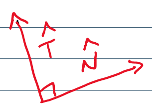


Divergensteoremet: Dersom $\hat N$ er utoverpekende enhetsnormal på C er

$$\iint_R \underbrace{\operatorname{div}\vec F}_{\text{Fluks-tetthet}}\, dA = \underbrace{\oint_C \vec F\cdot\hat N\, ds}_{\text{Fluks}}$$

Hvorfor? Hvis $\vec G=(-F_2,F_1)$ er $\operatorname{curl}\vec G=\operatorname{div}\vec F$ så

$$\iint_R \operatorname{div}\vec F\, dA = \iint_R \operatorname{curl}\vec G\, dA = \oint_C \vec G\cdot\hat T\, ds = \oint_C \vec F\cdot\hat N\, ds$$



$$\hat T=(T_1,T_2) \qquad \hat N=(T_2,-T_1)$$

$$\vec G\cdot\hat T = (-F_2,F_1)\cdot(T_1,T_2) = F_1T_2 - F_2T_1$$

$$\vec F\cdot\hat N = (F_1,F_2)\cdot(T_2,-T_1) = F_1T_2 - F_2T_1$$

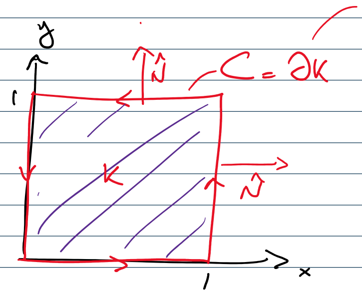
Disse teoremene er ekstremt nyttige for å beregne et linjeintegral med et dobbeltintegral og omvendt

Eksempler:

① Beregn sirkulasjonen til

$\vec F(x,y)=(xe^y,\ x+\frac{1}{2}x^2e^y)$

rundt randen av kvadratet $K=[0,1]^2$, orientert mot klokken



Greens teorem:

$$\oint_{\partial K}\vec F\cdot d\vec r = \iint_K \underbrace{\operatorname{curl}\vec F}_{(\nabla\times\vec F)\cdot\hat k}\, dA = \iint_K(\partial_x F_2-\partial_y F_1)\,dA = \iint_K\left[(1+xe^y)-xe^y\right]dA = \iint_K 1\,dA = |K| = 1$$

② Hva med fluksen til det samme vektorfeltet ut av kvadratet

Divergensteoremet:

$$\oint_{\partial K} \vec{F}\cdot\hat{N}\,ds = \iint_K \operatorname{div}\vec{F}\,dA = \iint_K \left(e^y + \tfrac{1}{2}x^2e^y\right)dA$$

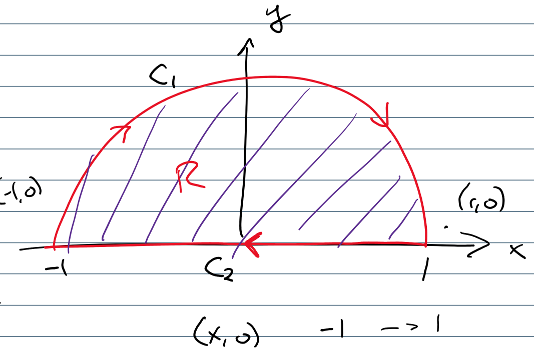
$$= \int_0^1\int_0^1 \underbrace{\left(1+\tfrac{1}{2}x^2\right)e^y}_{\text{Separabel}}\,dy\,dx = \left(\int_0^1\left(1+\tfrac{1}{2}x^2\right)dx\right)\left(\int_0^1 e^y\,dy\right)$$

$$= \frac{7}{6}(e-1)$$

(3) Hva er arbeidet til

$$\vec{F}(x,y) = \left(2x\arctan(y),\ \frac{x^2}{1+y^2} - \cos(x) + xy\right)$$

langs øvre halvdel av enhetssirkelen fra $(-1,0)$ til $(1,0)$?



C_1 er ikke en lukket kurve, men $C = C_1 \cup C_2$ er lukket.

Så

$$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \operatorname{curl}\vec{F}\,dA$$

Her er $$\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{-1}^{1}\underbrace{(0,\ x^2-\cos(x))\cdot(1,0)}_{0}\,dx = 0$$

$$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left[\left(\cancel{\frac{2x}{1+y^2}} + \sin(x) + y\right) - \cancel{\frac{2x}{1+y^2}}\right]dA = \iint_R (\sin(x)+y)\,dA$$

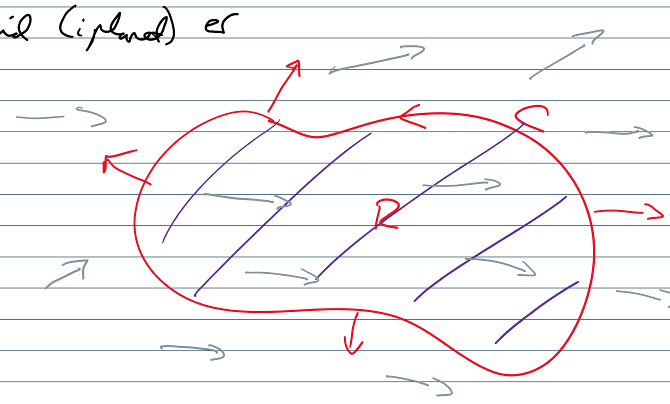
$$= \iint_R y\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^1 r\sin(\theta)\,r\,dr\,d\theta = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$\sin(x)$ er odde
R er symmetrisk
om y-aksen

(4) Hvis $\vec{v}$ er hastighetsfeltet til et ukompressibelt fluid (i planet) er

$$\oint_C \vec{v}\cdot\hat{N}\,ds = 0$$

for enhver lukket kurve $C \subset \mathbb{R}^2$

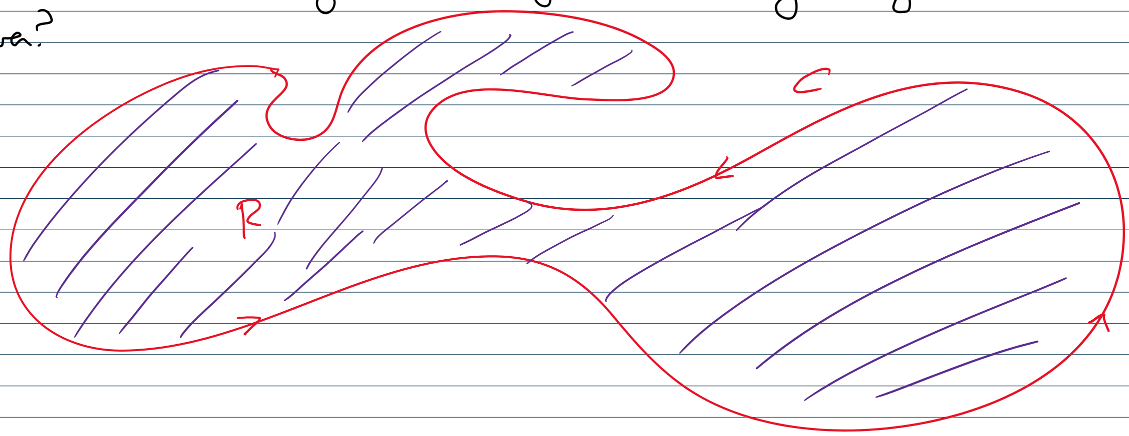


Divergensteoremet: $$\oint_C \vec{v}\cdot\hat{N}\,ds = \iint_R \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{div}\vec{v}}}\,dA = 0$$

Flere eksempler: Ex 3,4 p 949

Areal innenfor en lukket kurve (8.4 og 8.6)

Anta at C er en lukket glatt kurve, og at den ikke skjærer seg selv. Hva er arealet innenfor kurven?



Orienter C mot klokken, og kall området innenfor for R.

Hvis $\vec{F}$ er et vektorfelt slik at $\operatorname{curl}\vec{F} = 1$ (uansett hvilket!)

er

Greens teorem

$$|R| = \iint_R 1\,dA = \iint_R \operatorname{curl}\vec{F}\,dA = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Spesielt er $\operatorname{curl}(0,x) = \operatorname{curl}(-y,0) = 1$ så

$$|R| = \oint_C \underbrace{(0,x)\cdot d\vec{r}}_{\text{"}x\,dy\text{"}} = \oint_C \underbrace{(-y,0)\cdot d\vec{r}}_{\text{"}-y\,dx\text{"}}$$

Hvis $\vec{r}(t) = (f(t), g(t))$ $a \le t \le b$ parametriserer C er

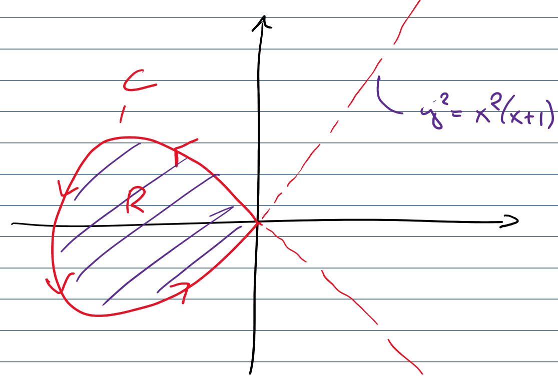
$$|R| = \int_a^b (0, f(t))\cdot(f'(t), g'(t))\,dt = \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

$$= -\int_a^b g(t)f'(t)\,dt$$

Eksempler:

(1) Hva er arealet innenfor kurven med parametrisering

$\vec{r}(t) = (t^2-1, t^3-t)$ $t \in [-1,1]$?



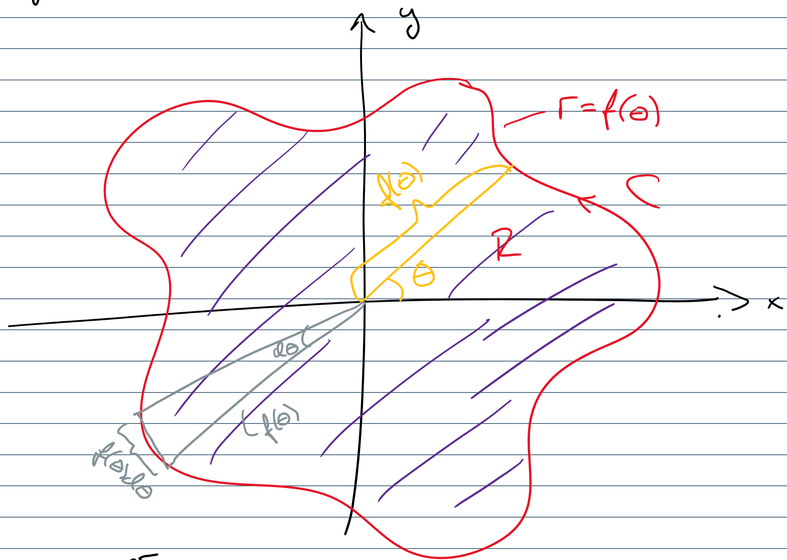
$$|R| = \int_{-1}^{1} (t^2-1)(3t^2-1)\,dt$$

$$|R| = \int_{-1} (t^2-1)(3t^2-1)\,dt$$

$$= 2\int_0^1 (t^2-1)(3t^2-1)\,dt = 2\int_0^1 (3t^4 - 4t^2 + 1)\,dt = 2\cdot\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{3} + 1\right) = \frac{8}{15}$$

② Hvis C er på formen $r = f(\theta)$, med $f(\theta) \geq 0$, for $0 \leq \theta \leq 2\pi$ kan vi parametrisere med

$$\vec{r}(\theta) = (f(\theta)\cos(\theta), f(\theta)\sin(\theta)) = f(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



$$|R| = \int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(\theta)\left(f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)\right)d\theta$$

og $$|R| = -\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(\theta)\left(f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)\right)d\theta$$

Så $$2|R| = \int_0^{2\pi} f(\theta)^2 \underbrace{(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)}_{1}\,d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)^2\,d\theta \qquad |R| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)^2\,d\theta$$

En sirkel med radius a har likning $r = a$

og har areal $$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\,d\theta = \frac{1}{2}2\pi\cdot a^2 = \pi a^2$$

+ Ex 2 p 949