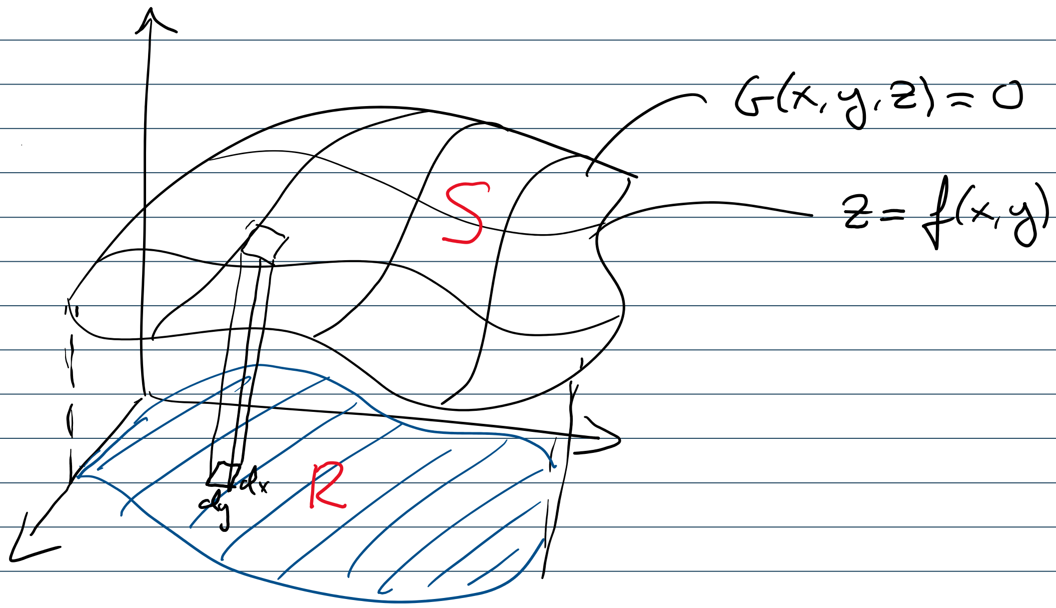
Arealelement for implisitt definert flate

Noen flater S er enklest beskrevet på formen $G(x,y,z)=0$



Hva blir arealelementet dS, uttrykket med G og $dxdy$, dersom S også er grafen til en funksjon f?

Vi har $G(x,y,f(x,y)) = 0$ og derfor

$$\left.\begin{aligned} &G_x + G_z f_x = 0 \\ \text{og}\quad &G_y + G_z f_y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla f = -\frac{(G_x, G_y)}{G_z}$$

Dermed er

$$\sqrt{1+|\nabla f|^2} = \sqrt{1+\frac{G_x^2+G_y^2}{G_z^2}} = \sqrt{\frac{G_x^2+G_y^2+G_z^2}{G_z^2}} = \left|\frac{\nabla G}{G_z}\right| dxdy$$

Så $dS = \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dxdy = \left|\frac{\nabla G}{G_z}\right| dxdy$

(Om en i stedet projiserer ned i yz- eller xz-planet må

(Om en i stedet projiserer ned i yz- eller xz-planet må man bare bytte ut G_z med hhv. G_x og G_y).

Eksempel:

Paraboloiden over svarer til $G(x,y,z) = 2z + x^2 + y^2 - 1$

$$\nabla G(x,y,z) = (2x, 2y, 2) = 2(x,y,1)$$

Så
$$dS = \frac{2\sqrt{x^2+y^2+1}}{2}\,dx\,dy = \sqrt{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$$
$$= \sqrt{r^2+1}\,r\,dr\,d\theta$$

Polarkoordinater

(Samme som før)

Dette kan noen ganger være enklere.