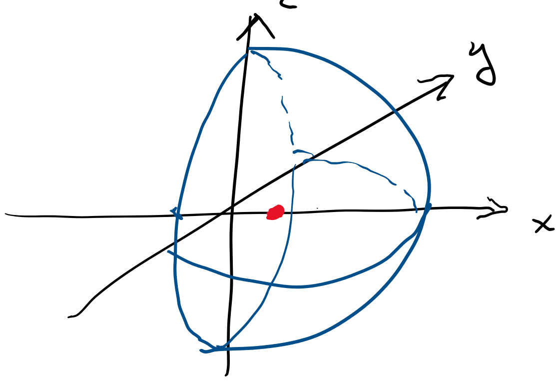
(2) På slutten av forelesningen på onsdag så vi at legemet $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0\}$ hadde massesenter $\left(\frac{3}{8},0,0\right)$



Bruker vi kulekoordinater med

$y=\rho\sin(\varphi)\cos(\theta)$ $z=\rho\sin(\varphi)\sin(\theta)$ og $x=\rho\cos(\varphi)$

ser vi at

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}}\iiint_T x\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{2\pi}\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\rho\cos(\varphi)\,\rho^2\sin(\varphi)\,d\theta\,d\varphi\,d\rho$$

$$= 3\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2\varphi)}{2}\,d\varphi\right)$$

$$= \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

Om vi istedet benytter sylinderkoordinater

$y=r\cos(\theta)$ $z=r\sin(\theta)$ x

svarer T til $0\le x\le 1$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le\sqrt{1-x^2}$

og vi får

og vi får

$$\frac{3}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,\underbrace{r\,dr\,d\theta\,dx}_{dV} = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x^2)\,dx = \frac{3}{8}$$

Det var i praksis dette vi gjorde på onsdag, uten å kalle det sylinderkoordinater.