IMAT2100 Matematiske metoder 3

Onsdag 6/10-21 08:15-10:00

Integrasjon i én variabel

Hvis $A \subset \mathbb{R}$ er

supremum av A, skrevet $\sup A$, den minste øvre skranken til A.

Eks $\sup (0,1) = 1$, $\sup (0,1] = 1 = \max (0,1]$, $\sup \mathbb{R} = \infty$

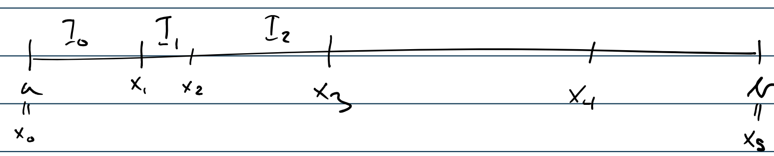
Tilsvarende er

infimum av A, $\inf A$, den største nedre skranken.

Eks $\inf (0,1) = 0$, $\inf [0,1) = 0 = \min [0,1)$, $\inf \mathbb{R} = -\infty$

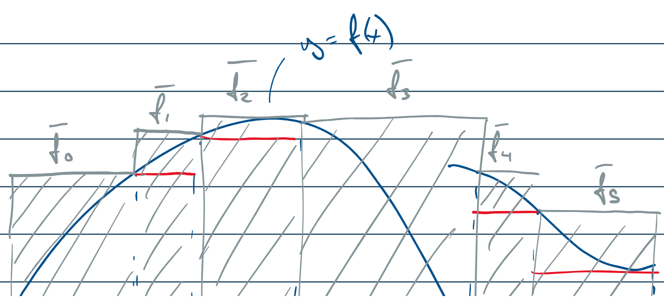
La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en begrenset funksjon, og la

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ være en partisjon P av $[a,b]$



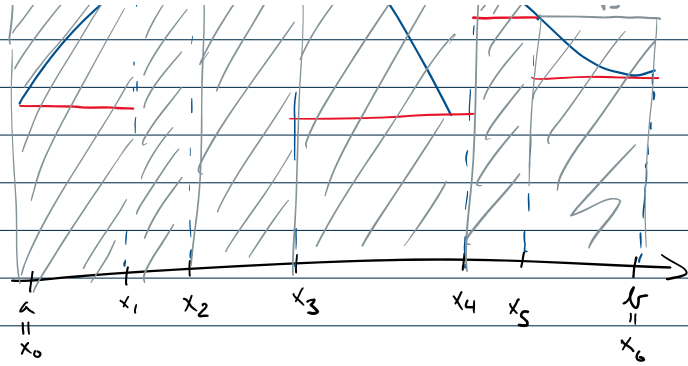
Definer $I_i = [x_i, x_{i+1}]$

$\underline{f}_i(P) = \inf f(I_i)$ $\quad \overline{f}_i(P) = \sup f(I_i)$ $\quad \delta x_i(P) = |I_i| = x_{i+1} - x_i$ $\quad i = 0, \dots, n-1$

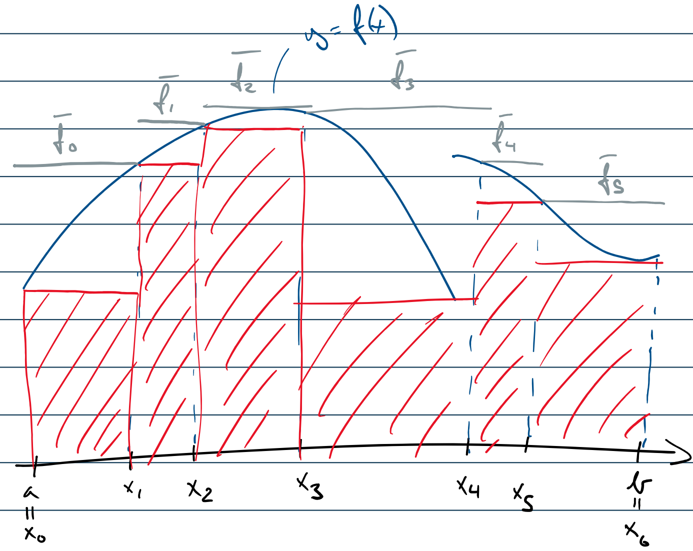


Arealet til boksene er

$$U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{f}_i(P)\, \delta x_i(P)$$



$$U(f,P) = \sum_{i=0} \bar{f}_i(P)\,\delta x_i(P)$$



$$L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{f}_i(P)\,\delta x_i(P)$$

Vi kan nå introdusere de øvre og nedre integralene

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P U(f,P) \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P L(f,P)$$

Hvis disse er like sier vi at f er integrerbar og definerer

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Teorem: Alle kontinuerlige funksjoner er integrerbare.

Man bruker selvfølgelig aldri denne definisjonen direkte!

Analysens fundamentalteorem: Hvis $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ er deriverbar og $F'=f$ er integrerbar er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

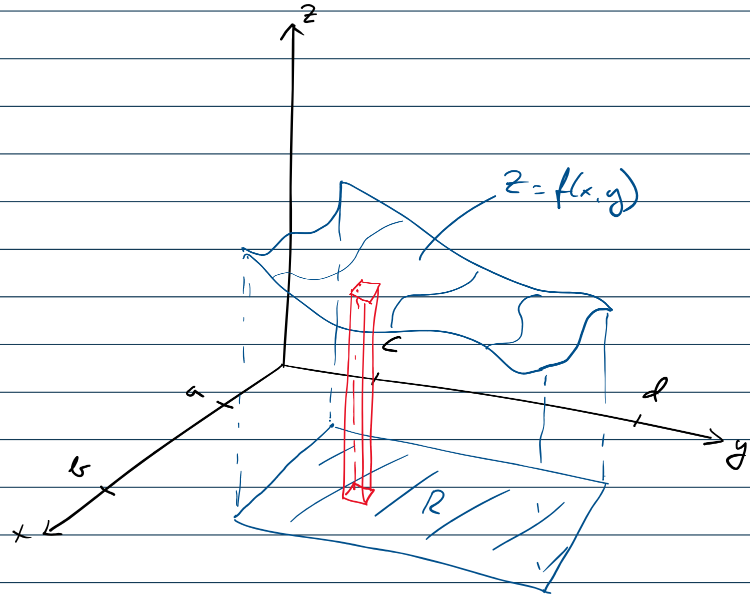
integralet er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Dobbeltintegraler (15.1)

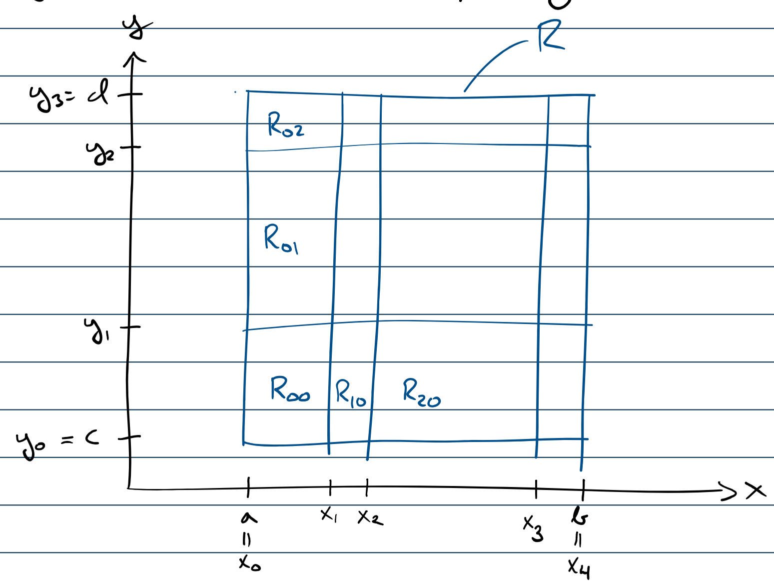
På samme måte som at integralet av en funksjon i én variabel er arealet under grafen, så er integralet av en funksjon av to variabler volumet under grafen.

$$f : \underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{\text{Rektangel } R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



Hvordan skal vi definere integralet $\iint_R f(x,y)\,dA$ av en begrenset funksjon på R?

En partisjon P består nå av en oppdeling av både x- og y-aksen.



$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

$\ddot{x}_0$ $\ddot{x}_4$

$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$

$\underline{f}_{ij}(P) = \inf f(R_{ij}) \quad \overline{f}_{ij} = \sup f(R_{ij})$ $\quad i = 0, \dots, n-1$

$j = 0, \dots, m-1$

$\delta A_{ij} = \delta x_i \, \delta y_j = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$

Volumet av søylene med $\underline{f}_{ij}(P)$ som høyde er

$$L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \underline{f}_{ij}(P) \, \delta A_{ij}(P)$$

Volumet av søylene med $\overline{f}_{ij}(P)$ som høyde

$$U(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \overline{f}_{ij}(P) \, \delta A_{ij}(P)$$

Akkurat som før $\displaystyle \underline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \sup_P L(f,P)$ og $\displaystyle \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \inf_P U(f,P)$

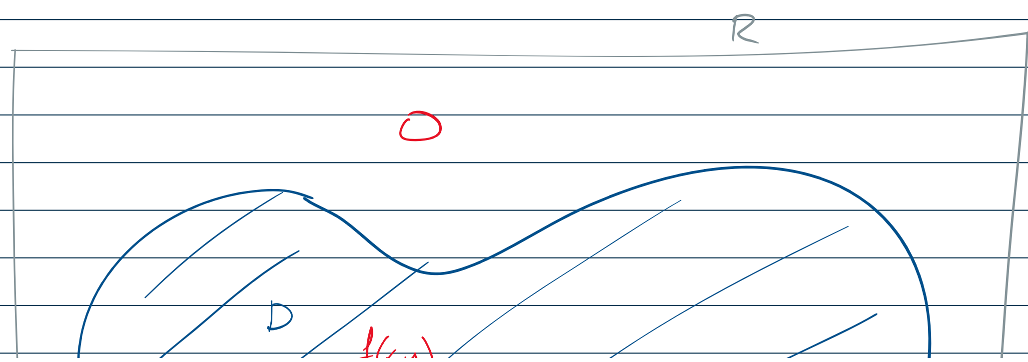
Hvis disse er like sier man at f er integrerbar og definerer

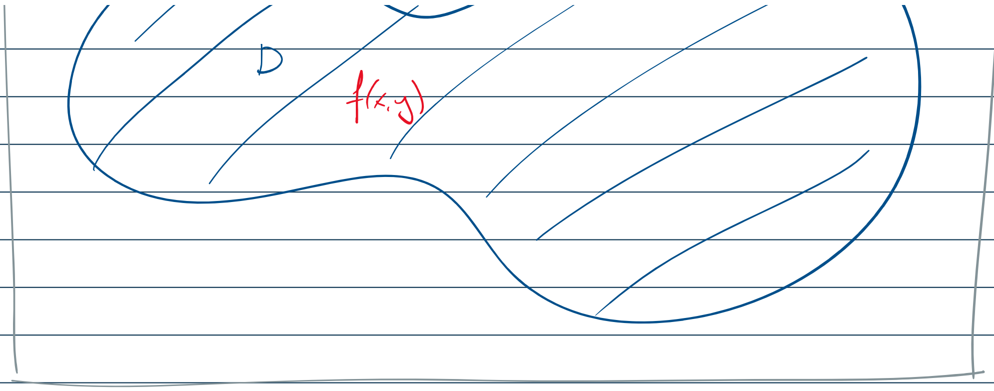
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA$$

Teorem: Alle kontinuerlige funksjoner er integrerbare

Alle de vanlige egenskapene, som linearitet $\left(\int (af + bg) = a\int f + b\int g\right)$, holder også for dobbeltintegraler.

<u>Integrasjon over mer generelle områder</u>





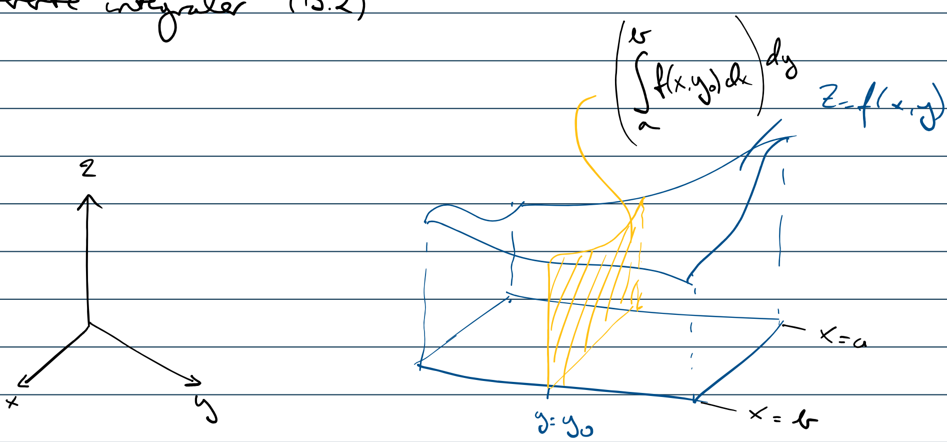
$\hat{f} : R \to \mathbb{R}$ $\qquad \hat{f}(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \notin D \\ f(x,y) & (x,y) \in D \end{cases}$

Definer $\qquad \iint_D f(x,y)\, dA = \iint_R \hat{f}(x,y)\, dA$

Merk: $\iint_D 1\, dA = \iint_D dA$ er det samme som arealet til D.

Hvordan regner vi faktisk ut dobbeltintegraler? Ved å bruke de vanlige integralene vi allerede kjener.

Iterete integraler (15.2)

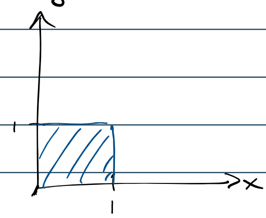


Teorem (Fubini): Dersom $R = [a,b] \times [c,d]$ og $f : R \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig er

$$\iint f(x,y)\, dA = \int_c^d \left(\int_a^b \underbrace{f(x,y)}_{y \text{ konstant}}\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d \underbrace{f(x,y)}_{x \text{ konstant}}\, dy \right) dx$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c \left(\int_a f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a \left(\int_c f(x,y)\,dy \right) dx$$

Eksempel: Integralet av $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definert ved $f(x,y) = ye^{xy}$, over kvadratet $K = [0,1]^2$



$$ye^{xy} = \partial_x(e^{xy})$$

$$\iint_K ye^{xy}\,dA = \int_0^1\int_0^1 ye^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[e^{xy}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 (e^y - 1)\,dy = \left[e^y - y\right]_0^1 = e^1 - 1 - 1 = e-2$$

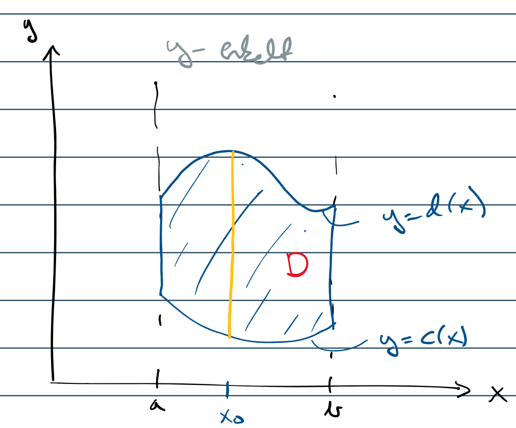
$$\iint_K ye^{xy}\,dA = \int_0^1\int_0^1 ye^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[1 - \overbrace{\frac{e^x - (1+x)}{x^2}}^{1/2\,;\,0}(1-x)\right] dx = \overset{1\,;\,0}{\left[\frac{e^x - 1}{x}\right]_0^1} = \frac{e^1-1}{1} - 1 = e-2$$

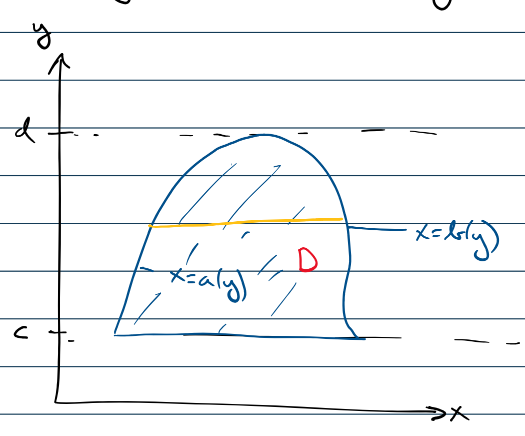
Samme svar, men veldig mye mer kronglete integraler:

Moralen er: Det lønner seg å velge "riktig" rekkefølge.

(Noen ganger er den ene rekkefølgen "umulig")

For å regne ut mer interessante integraler trenger vi en bedre versjon av Fubini.





Et område kalles y-enkelt hvis

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)\}$$

for kontinuerlige c, d. Tilsvarende x-enkelt hvis

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a(y) \le x \le b(y), \quad c \le y \le d\}$$

for kontinuerlige a, b

Teorem (Fubini): Dersom $f: D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig så er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

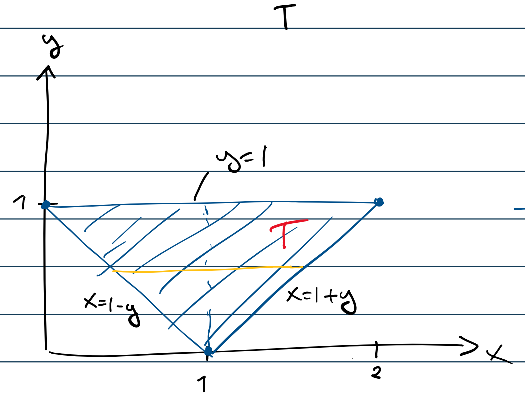
dersom D er y-enkelt, og

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Eksempler:

1. La T være trekanten med hjørner i $(0,1)$, $(1,0)$ og $(2,1)$.

Hva blir da $\iint_T xy\,dA$?



Er T

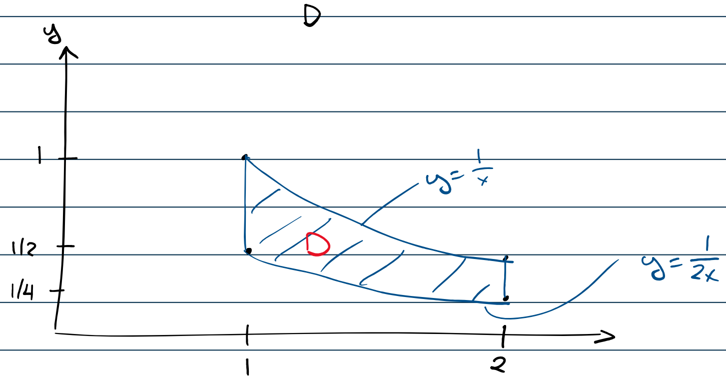
→ x-enkelt? Ja

y-enkelt? Ja

$\int^{1+y}$

$$I = \int_0^1 \int_{1-y}^{1+y} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{1-y}^{x=1+y} dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\underbrace{(1+y)^2-(1-y)^2}_{4y}\right] y\,dy = \int_0^1 2y^2\,dy = \frac{2}{3}$$

(1) Hva med $I = \iint_D x^2 e^{-x^2}\,dA$ $\quad D = \{(x,y) : R^2 : 1 \le x \le 2,\ \frac{1}{2x} \le y \le \frac{1}{x}\}$



$$I = \int_1^2 \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} x^2 e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right) x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x e^{-x^2}\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{4}e^{-x^2}\right)'\,dx = -\frac{1}{4}e^{-2^2} - \left(-\frac{1}{4}e^{-1^2}\right) = \frac{e^{-1}-e^{-4}}{4}$$

Se også: Ex 1-4 p 841-844