Uke 37 Fredag

fredag 17. september 2021 07:55

IMAT2100 Matematiske metoder 3

Fredag 17/9-21 09:15 - 11:00

På onsdag pratet vi om flater i rommet

$f(x,y,z) = 0$ (*) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Spesielt:

Plan $\vec{x} \cdot \hat{N} = a$

$\vec{x} = (x,y,z)$

Andregradsflater $\vec{x} \cdot (A\vec{x} + \vec{b}) = c$

(Skalare) funksjoner av flere variabler (13.1)

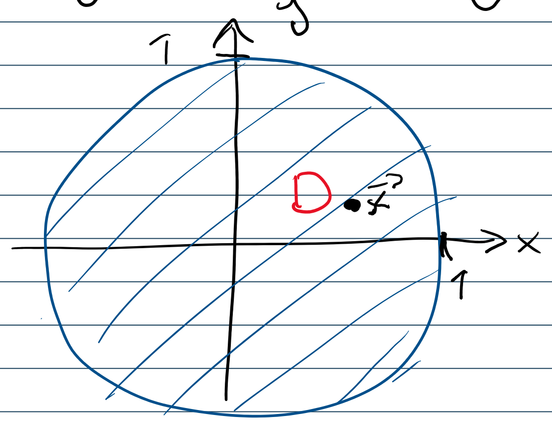
Altså funksjon $f: U \to \mathbb{R}$, der U er en delmengde av $\mathbb{R}^n$.

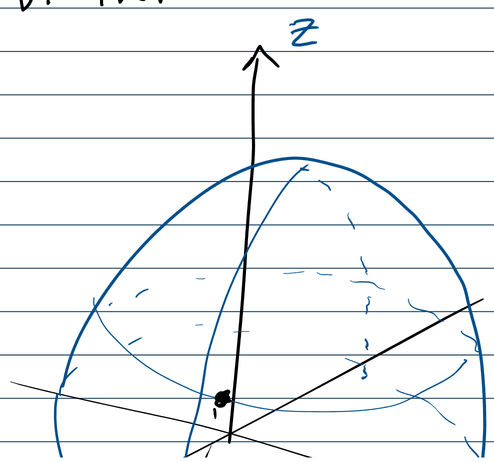
Vi sier at X er en delmengde Y dersom alle elementene i X også er i Y, og skriver $X \subset Y$ $(X \subseteq Y)$

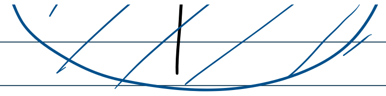
Grafen til en funksjon av to variabler er en flate i rommet

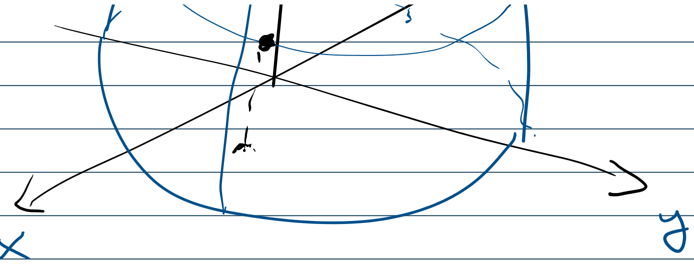
$U = D = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| \leq 1 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$

$g: D \to \mathbb{R}$ $g(\vec{x}) = \sqrt{1 - |\vec{x}|^2}$









Grafen til g, som består av punktene

$(\vec{x}, g(\vec{x})) = (x, y, g(x,y))$ i rommet for $\vec{x} \in D$

er øvre halvdel av enhetssfæren:

$$z \geq 0$$

$$z = \sqrt{1-|\vec{x}|^2} = \sqrt{1-x^2-y^2} \Longrightarrow z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

Vi ser at om vi definerer $f(x,y,z) = z - g(x,y)$ blir grafer bare et spesialtilfelle av (*)

Noen av andregradsflatene er eksempler på flater som ikke er grafen til en funksjon

(Hele enhetssfæren for eksempel)

Kan være vanskelig å visualisere grafen til en funksjon, selv av to variabler.

Et "triks" er å se på nivåkurvene til funksjonen.

Nivåkurvene er rett og slett kurvene i planet man får ved å løse $f(x,y) = a$ for faste $a \in \mathbb{R}$

Eksempel:

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = a \iff x = ax^2 + ay^2$$

$$\Longrightarrow ax^2 - x + ay^2 = 0$$

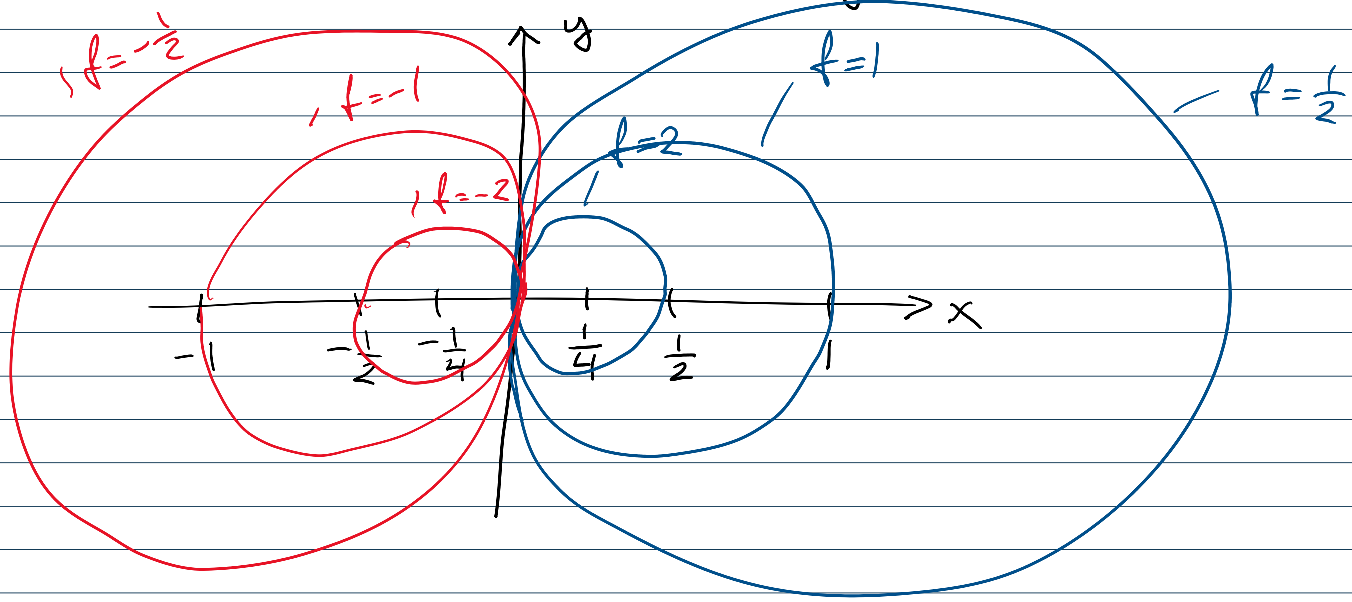
$$f(x,y) = \frac{\quad}{x^2+y^2} = a \iff \dots = 0$$

$$\iff ax^2 - x + ay^2 = 0$$

$$\iff a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} + ay^2 = 0$$

$$\iff \left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

Nivåkurvene som svarer til $a \in \mathbb{R}$ er altså en sirkel med sentrum i $\left(\frac{1}{2a}, 0\right)$ og radius $\frac{1}{2|a|}$

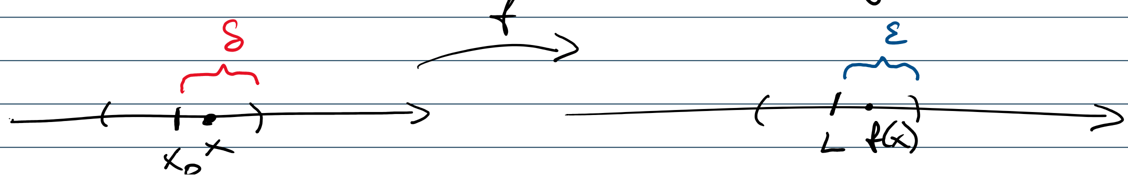


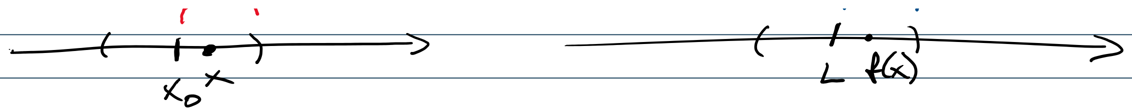
På akkurat samme måte kan man snakke om nivåflater for en funksjon av tre variabler, som da svarer til løsningen av $f(x,y,z) = a \qquad a \in \mathbb{R}$

Se også Ex 3-7 (p.698-700)

Grenser og kontinuitet (13.2)

Vi husker at en "vanlig" funksjon $f: U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}$) sies å ha grense L i $x_0 \in \mathbb{R}$ dersom $f(x)$ kan gjøres vilkårlig nære L ved å la x være vilkårlig nære x_0.





For alle $\varepsilon > 0$ finnes det en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

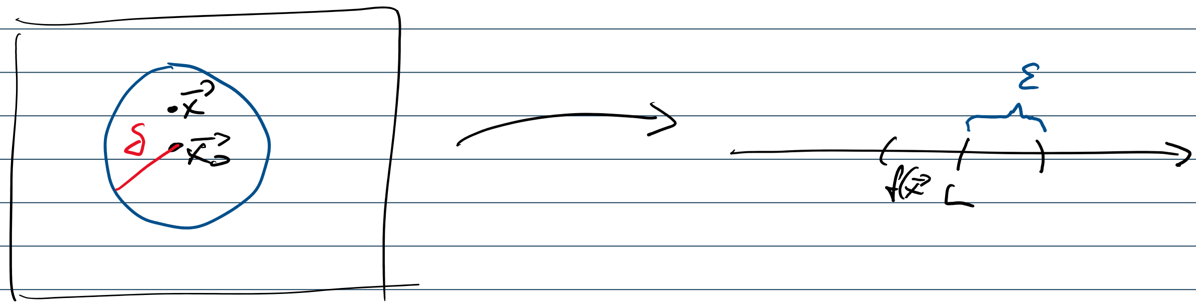
Skriver $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Dersom $x_0 \in U$ og $f(x_0) = L$ sier man at f er kontinuerlig i x_0. Om dette er tilfelle i alle punkter $x_0 \in U$ sier man at f er kontinuerlig.

<u>Akkurat</u> det samme er tilfelle for funksjoner av flere variabler!

En funksjon $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$) sies å ha grense L i punktet $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ dersom det for alle $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at

$$0 < |\vec{x} - \vec{x_0}| < \delta \implies |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$$



Vi skriver $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = L$ (evt $(x, y) \to (x_0, y_0)$)

Dersom $\vec{x_0} \in U$ og $f(\vec{x_0}) = L$ sier man at f er kontinuerlig i $\vec{x_0}$, etc.

Regnereglene du er vant med holder som før, så

det er [illegible]

Regnereglene du er vant med holder som før, så det er sjelden man behøver å gå tilbake til definisjonen

Men: Vi må være litt mer forsiktige!

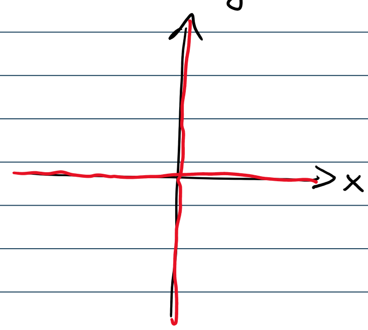
Eksempler:

① Regn ut $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}$ om den eksisterer.

Her er både telleren og nevneren kontinuerlige, og sistnevnte er ikke 0 i $(0,0)$, så grensen eksisterer og

$$L = \frac{\cos(0\cdot 0)}{1+0^2+0^2} = \frac{1}{1} = 1$$

② $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$



Er f kontinuerlig?

Både $g(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$ og $h(x,y) = xy$

er kontinuerlige, og $f(x,y) = g(h(x,y))$, så ja

(Skrives ofte som $f = g \circ h$)

③ Vis at $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$

Det kan være nyttig å gjøre om til polarkoordinater

$(2xy)^2$

Det kan være nyttig å gjøre om til polarkoordinater

$$\left| \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{(2r\cos(\theta)r\sin(\theta))^2}{r^2} \right|$$

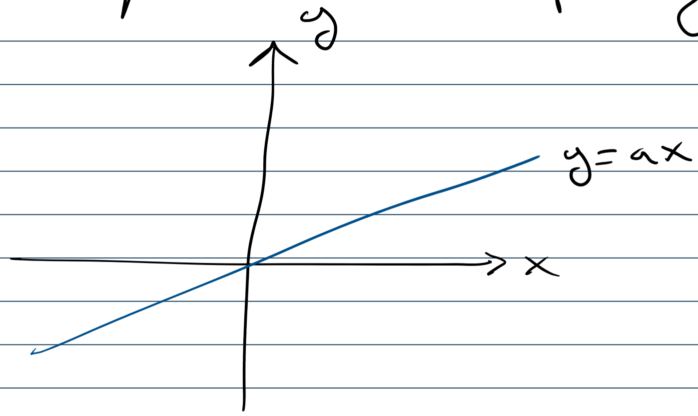
$$= r^2 \sin(2\theta)^2 \leq r^2 = |(x,y)-(0,0)|^2$$

Her er r nettopp $|(x,y)-(0,0)|$, så dette viser at grensen eksisterer og er 0.

(4) Ex 3. p705

Eksisterer grensen til $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ når $(x,y) \to (0,0)$?

La oss se på verdiene til f langs linjen $y=ax$



$$f(x,ax) = \frac{2x(ax)}{x^2+(ax)^2} = \frac{2a}{1+a^2}$$

Dette betyr at $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=ax}} f(x,y) = \frac{2a}{1+a^2}$

for hver $a \in \mathbb{R}$.

Dersom grensen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ hadde eksistert måtte alle disse vært identiske!

Grensen eksisterer altså ikke!

Det holder å finne to forskjellige linjer som gir ulik grense!

(S) Ex 4 (p.706)

Hva med $f(x,y) = \frac{2x^2 y}{x^4+y^2}$? $((x,y) \neq (0,0))$

$$f(x, ax) = \frac{2x^2 ax}{x^4 + a^2x^2} = \frac{2ax}{x^2+a^2} \quad \text{for alle } a \neq 0$$

Så $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=ax}} f(x,y) = 0$

(Det samme er sant for linjene $y=0$ og $x=0$)

Men da må vel grensen eksistere og være lik 0?

Nei! La oss se langs parabelen $y=x^2$ i stedet.

$$f(x, x^2) = \frac{2x^2x^2}{x^4+(x^2)^2} = 1 \neq 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = 1$$

Det er altså ikke tilstrekkelig å se på alle linjer om vi skal vise at grensen eksisterer.

(se også Ex 5 p 706)

Partiellderiverte (13.3)

Vi sier at en funksjon f av to variabler er partiellderiverbar med hensyn på x i $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ dersom $f(\cdot, y_0)$ er deriverbar i x_0 i vanlig forstand.

partiellderivert med hensyn på x i (x_0, y_0) om
dersom $f(\cdot, y_0)$ er deriverbar i x_0 i vanlig forstand -

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Kjent barn har mange navn: f_x, f_1, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_x f$

Tilsvarende også

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Figur 13.16 og 13.17 i boken

Eks: $f(x,y) = e^{xy} + x^4$

$$f_x(x,y) = ye^{xy} + 4x^3$$

$$f_y(x,y) = xe^{xy}$$

Dette var for to variabler for enkelhets skyld, men tilsvarende kan snakke om f_z (eller andre variabler)

Se Ex 2,3,5 (710-711)

Høyere ordens partiellderiverte (13.4)

Hvis vi deriverer enda en gang kan vi snakke om andre ordens partiellderiverte:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

eller enda høyere, f.eks $\frac{\partial^4 f}{\cdots} = f_{zyxx}$

eller enda høyere, f.eks $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z} = f_{zyxx}$

Merk: Dersom de partiellderiverte er kontinuerlige har rekkefølgen ingenting å si

Altså $f_{xy} = f_{yx}$ (og $f_{zyxx} = f_{xzxy}$)

Eksempel: $f(x,y) = x^2 y$ $\quad f_x = 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_{xy} = 2x$

$f_y = x^2 \quad f_{yx} = 2x \quad f_{yy} = 0$

Se også Ex 7 p.716