Oppgave 1 ***Oppgaven blir automatisk rettet.***

a) *Én* av disse mengdene er *ikke* sammenhengende. Hvilken?

i) Planet uten origo

ii) Planet uten første kvadrant

iii) Planet uten x-aksen

iv) Rommet uten x-aksen

Retteveiledning Rett svar er iii.Det er kun planet uten x-aksen som ikke er sammenhengende. Det er umulig å komme seg fra ett halvplan til det andre uten å forlate mengden. △

b) *Én* av disse mengdene er *enkelt*sammenhengende. Hvilken?

i) Planet uten origo

ii) Rommet uten origo

iii) Rommet uten x-aksen

iv) Rommet uten xy-planet

Retteveiledning Rett svar er ii. Av disse er det kun rommet uten origo som er enkeltsammenhengende. (Den siste mengden er ikke engang sammenhengende.) △

c) *Én* av disse påstandene er alltid sann. Hvilken?

i) Et konservativt vektorfelt er rotasjonsfritt

ii) Et konservativt vektorfelt er divergensfritt

iii) Et rotasjonsfritt vektorfelt er konservativt

iv) Et divergensfritt vektorfelt er konservativt

Retteveiledning Rett svar er i. Kun første påstand er alltid sann. Et konservativt vektorfelt er rotasjonsfritt, men det motsatte er ikke nødvendigvis sant med mindre det er definert på en enkelt-sammenhengende mengde. △

d) Du har et glatt vektorfelt $\mathbf{F}$ definert på en åpen mengde U i rommet, og finner ut at $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Hva må du kreve for å være sikker på at det nødvendigvis finnes en skalar funksjon φ slik at $\mathbf{F} = \nabla\varphi$?

i) U er lukket

ii) U er sammenhengende

iii) U er enkeltsammenhengende

iv) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$

Retteveiledning Rett svar er iii. Vi må vite at U er enkeltsammenhengende. △

e) *Én* av disse funksjonene er et potensial for $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ i planet. Hvilken?

i) $\psi(x, y) = x - y$

ii) $\psi(x, y) = x^2 - y^2$

iii) $\psi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

iv) $\psi(x, y) = -xy$

Retteveiledning Rett svar er iii. △

Oppgave 2 Funksjonen T måler temperaturen i en kubeformet vanntank, som opptar området K beskrevet av ulikhetene

$$0 \leq x \leq 10, \qquad 0 \leq y \leq 10, \qquad 0 \leq z \leq 10$$

i rommet.

Altså betyr $T(x, y, z)$ temperaturen i punktet $(x, y, z) \in K$, og vi antar at T er kontinuerlig deriverbar.

a) Vi har et antall temperatursensorer i tanken, som viser at

$$T(5,5,5) = 10 \quad \text{og} \quad \begin{aligned} T(6,5,5) &= 11 \\ T(5,6,5) &= 12 \\ T(5,5,4) &= 11.5 \end{aligned}$$

i) Bruk disse målingene til å finne en tilnærming til de tre partiellderiverte T_x, T_y og T_z i punktet $\mathbf{p} = (5, 5, 5)$.

ii) Finn deretter en tilnærming til gradienten i samme punkt.

Retteveiledning Det er her naturlig å benytte

$$\frac{T(6,5,5) - T(\mathbf{p})}{6-5} = 1$$

som en tilnærming for T_x, og tilsvarende

$$\frac{12-10}{6-5} = 2, \quad \text{og} \frac{11.5-10}{4-5} = -1.5$$

for T_y og T_z. Dette tilsvarer tilnærmingen $(1, 2, -1.5)$ for gradienten ∇T i $\mathbf{p}$. △

b) I punktet $\mathbf{q} = (2, 1, 2)$ kan vi måle direkte at $\nabla T(\mathbf{q}) = (1, -1, 2)$

i) Hva blir stigningstallet til temperaturen i retningen $\mathbf{v} = (1, 2, -1)/\sqrt{6}$?

ii) Hva med i en retning $\mathbf{w}$ som tangerer nivåflaten $T(x, y, z) = T(\mathbf{q})$ i punktet?

iii) I samme retning som $\nabla T(\mathbf{q})$?

Retteveiledning Siden $|\mathbf{v}| = 1$ finner vi stigningstallet med den retningsderiverte. Her er

$$D_{\mathbf{v}}T(\mathbf{q}) = \nabla T(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} = \frac{1-2-2}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Gradienten står derimot normalt på nivåflaten, slik at $D_{\mathbf{w}}T(\mathbf{q}) = 0$ når $\mathbf{w}$ tangerer denne flaten.

Til slutt har vi at

$$D_{\widehat{\nabla T(\mathbf{q})}}T(\mathbf{q}) = \nabla T(\mathbf{q}) \cdot \frac{\nabla T(\mathbf{q})}{|\nabla T(\mathbf{q})|} = |\nabla T(\mathbf{q})| = \sqrt{6}.$$

△

c) Tilsvarende måler vi også at $T(\mathbf{r}) = 10.5$ og $\nabla T(\mathbf{r}) = (-1, 2, 1)$ i punktet $\mathbf{r} = (8, 9, 7)$. Bruk dette til å finne lineærtilnærmet temperatur i punktet $(9, 8, 9)$.

Retteveiledning Lineærtilnærmingen til $T(x, y, z)$ rundt $\mathbf{r}$ blir

$$L(x, y, z) = T(\mathbf{r}) + \nabla T(\mathbf{r}) \cdot ((x, y, z) - \mathbf{r}),$$

så spesielt er

$$L(9, 8, 9) = 10.5 + (-1, 2, 1) \cdot (1, -1, 2) = 9.5$$

den lineærtilnærmede temperaturen i $(9, 8, 9)$. △

Oppgave 3 La funksjonen f være definert ved

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)e^{y-x}$$

i hele planet.

a) Hva er de kritiske punktene til f?

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Vi finner

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= \left(2x - (x^2+y^2)\right)e^{y-x}, \\ \partial_y f(x,y) &= \left(2y + (x^2+y^2)\right)e^{y-x}, \end{aligned}$$

og må derfor løse likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - (x^2+y^2) &= 0 \\ 2y + (x^2+y^2) &= 0. \end{aligned}$$

Legger vi likningene sammen ser vi at $y = -x$, som innsatt i første likning gir

$$x(1-x) = 0,$$

og derfor enten $x = 0$ eller $x = 1$. De kritiske punktene er altså $\mathbf{0}$ og $(1,-1)$. △

b) Finn Hessematrisen $H(x,y)$

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Her er

$$H(x,y) = e^{y-x}\begin{pmatrix} 2-4x+(x^2+y^2) & 2x-2y-(x^2+y^2) \\ 2x-2y-(x^2+y^2) & 2+4y+(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

△

c) Klassifiser de kritiske punktene du fant i a).

(Hvis du *ikke* fikk til a) kan du i stedet klassifisere punktene $(-1,0)$ og $(1,0)$ som om de var kritiske punkter.)

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Vi har Hessematrisene

$$H(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad H(1,-1) = e^{-2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egenverdiene til $H(\mathbf{0})$ kan leses direkte av diagonalen, og er begge positive. Derfor er $\mathbf{0}$ et lokalt minimum. Siden $\det H(1,-1) = -4e^{-4} < 0$ er $(1,-1)$ derimot et sadelpunkt.

For de alternative punktene er

$$H(-1,0) = e\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad H(1,0) = e^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

og tilsvarende konklusjon blir at $(-1,0)$ ville vært et lokalt minimum og $(1,0)$ ville vært et sadelpunkt, dersom de hadde vært kritiske punkter. $\triangle$

d) Hva er største og minste verdi til f på enhetsdisken $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$?

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Det eneste av de to kritiske punktene som ligger i D er $\mathbf{0}$, der $f(\mathbf{0}) = 0$. I tillegg må vi undersøke randverdiene.

Legg merke til at dersom $\mathbf{a} = (1,-1)$ er

$$y - x = \mathbf{a} \cdot (x,y) = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos(\theta)$$

for (x,y) på randen til D (enhetssirkelen), der θ er vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og (x,y). Dermed er

$$f(x,y) = e^{\sqrt{2}\cos(\theta)}$$

på randen. Største verdi på randen er altså $e^{\sqrt{2}}$ når $\theta = 0$, og minste er $e^{-\sqrt{2}}$ når $\theta = \pi$. Dette svarer til punktene $\pm\mathbf{a}/\sqrt{2}$.

På D er derfor minste verdi 0 i $\mathbf{0}$, og største er $e^{\sqrt{2}}$ i $\mathbf{a}/\sqrt{2}$. $\triangle$

Oppgave 4 ***Oppgaven blir automatisk rettet, og alle svarene blir heltall.***

(Det er tillatt å levere skriftlig besvarelse for manuell retting. Da holder det ikke lenger kun å finne rett verdi, og vi ser bort fra svarfeltet.)

Beregn følgende itererte integraler:

a)

$$\int_1^5 \int_1^3 (x+y)\,dx\,dy.$$

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ 40 $\triangle$

b)

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} 48xy\, dx\, dy$$

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ 2 △

La T være legemet beskrevet av ulikhetene $x^2 + y^2 \leq 2$ og $x \leq z \leq 5$.

c) Hva blir $\iiint_T \frac{1}{\pi}\, dV$?

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r\cos(\theta)}^{5} r\, dz\, dr\, d\theta = 10$$

△

d) Hva med $\iiint_T \sin(y)\, dV$?

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ 0, siden T er symmetrisk om xz-planet, og integranden er odde i y. △

Oppgave 5 La S være den parametriske flaten gitt ved

$$\mathbf{r}(u, v) = A(\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u))$$

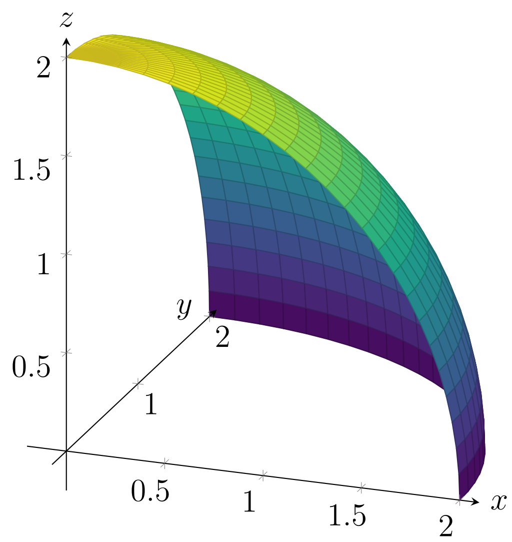
for $u, v \in (0, \pi/2)$. Her er $A > 0$ en konstant.

a) *i)* Beskriv hva slags flate dette er

ii) Lag en skisse av flaten når $A = 2$. Figuren bør inneholde koordinataksene.

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Parametriseringen svarer til kulekoordinater med $u = \varphi$ og $v = \theta$. Flaten er derfor den delen av sfæren med sentrum i origo og radius A som befinner seg i første oktant. △

b) Beregn de to partiellderiverte $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.



Figur 1: Den parametriske flaten.

Retteveiledning De to partiellderiverte blir

$$\partial_u \mathbf{r}(u,v) = A\big(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u)\big)$$
$$\partial_v \mathbf{r}(u,v) = A\big(-\sin(u)\sin(v), \sin(u)\cos(v), 0\big)$$

△

Vi orienterer nå S slik at enhetsnormalen har *negativ* z-komponent.

Det oppgis også at $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = A^2\Big(\sin(u)^2\cos(v), \sin(u)^2\sin(v), \cos(u)\sin(u)\Big)$

c) Fluksen til vektorfeltet $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ gjennom flaten S kan finnes ved å regne ut et iterert integral på formen

$$\int_a^b \int_{c(v)}^{d(v)} f(u,v)\,du\,dv,$$

der a og b er konstanter, og c, d kan (potensielt) avhenge av v. Skriv ned dette integralet.

Retteveiledning Vi legger merke til at

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = A\sin(u)\mathbf{r},$$

siden $\sin(u)$ er felles for alle komponentene. Vi vet derfor at vektorarealementet er

$$d\mathbf{S} = \pm A\sin(u)\mathbf{r}\,du\,dv,$$

der fortegnet må velges slik at det stemmer overens med orienteringen på flaten. Siden alle komponentene av $\sin(u)\mathbf{r}$ er ikke-negative, må vi velge $-$ for å få riktig fortegn på z-komponenten.

Vi finner dermed

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = (-\mathbf{r}) \cdot (-A\sin(u)\mathbf{r}) = A\sin(u)|\mathbf{r}|^2 = A^3\sin(u),$$

og fluksintegralet blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} A^3 \sin(u)\, du\, dv$$

$\triangle$

d) Evaluer integralet du fant i c

(Med god forståelse kan du også finne verdien uten å beregne integralet direkte.)

Retteveiledning Å beregne integralet direkte er rett frem, og gir $\frac{1}{2}\pi A^3$.

En alternativ måte å tenke på, er at på grunn av symmetri er den riktige enhetsnormalvektoren $-\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ i hvert punkt flaten. Dermed er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (-\mathbf{x}) \cdot \left(-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) dS = \iint_S |\mathbf{x}|\, dS = A|S|,$$

siden $|\boldsymbol{x}| = A$ på S. Siden S er en åttendedel av hele sfæren med radius A er $|S| = \frac{1}{8}4\pi A^2$, og vi finner derfor samme svar. $\triangle$

Oppgave 6 Paraboloiden $3z = 4(x^2 + y^2) - 1$ og den parabolske sylinderen $z = 1 - 4x^2$ skjærer hverandre langs en lukket kurve C, som orienteres mot klokken sett ovenfra.

a) Vis at C kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\cos(t), \sin(t), \sin(t)^2\right)$$

for $0 \leq t \leq 2\pi$. Det holder å vise at begge likningene er oppfylt.

Retteveiledning Det står at det holder å verifisere at $\mathbf{r}(t)$ oppfyller begge likningene for alle $0 \leq t \leq 2\pi$, men la oss motivere hvor parametriseringen kommer fra:

Ved å eliminere z ser vi at skjæringskurven ligger på den elliptiske sylinderen

$$\left(\frac{x}{1/2}\right)^2 + y^2 = 1,$$

som på naturlig vis gir de to første komponentene av parametriseringen. Til slutt finner vi

$$z(t) = 1 - 4\left(\frac{1}{2}\cos(t)\right)^2 = 1 - \cos(t)^2 = \sin(t)^2,$$

som stemmer overens med tredje komponent. △

b) Beregn sirkulasjonen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-yz, xz, 1)$ rundt C. (Det vil si, finn verdien til linjeintegralet $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.)

Retteveiledning Vi har

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) &= \left(-\sin(t)^3, \frac{1}{2}\cos(t)\sin(t)^2, 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\sin(t), \cos(t), 2\sin(t)\cos(t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(t)^4 + \frac{1}{2}\cos(t)^2\sin(t)^2 + 2\sin(t)\cos(t) \\
&= \frac{1}{2}\sin(t)^2\left(\sin(t)^2 + \cos(t)^2\right) + \sin(2t) \\
&= \frac{1}{2}\sin(t)^2 + \sin(2t),
\end{aligned}$$

og derfor

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{t})) \cdot \dot{\mathbf{r}}\, dt \\
&= \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

△

c) Finn divergensen og rotasjonen til vektorfeltet $\mathbf{F}$.

Retteveiledning Her blir

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 + 0 + 0 = 0$$

og

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -yz & xz & 1 \end{vmatrix} \\
&= (0 - x, -(0 - (-y)), z - (-z)) \\
&= (-x, -y, 2z).
\end{aligned}$$

△

Kall den delen av paraboloiden som ligger *innenfor* skjæringskurven for S, og definer vektorfeltet $\mathbf{G}(x, y, z) = (-x, -y, 2z)$.

d) Beregn flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er oppoverpekende enhetsnormalvektor på S.

Retteveiledning Vi ser at vektorfeltet $\mathbf{G}$ er lik $\operatorname{curl} \mathbf{F}$. Stokes teorem sier dermed at

$$\iint_S \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

som er integralet vi regnet ut i b). Svaret er altså $\pi/2$ her også.

(Det går fint an å regne ut flateintegralet direkte også.) $\triangle$

Formelliste

Andrederiverttesten for funksjoner av to variabler er basert på

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Sylinderkoordinater (r, θ, z)

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\sin(\theta), \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad dV = r\,dr\,dz\,d\theta \\ z &= z, \end{aligned}$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ)

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin(\varphi)\cos(\theta), \\ y &= \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad dV = \rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ z &= \rho\cos(\varphi), \end{aligned}$$

Variabelskifte

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv, \qquad \text{der} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

og tilsvarende for flere variabler

Flateintegral

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv, \qquad \text{eller} \qquad dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|}\,dx\,dy$$

Greens teorem

$$\oint_{\mathcal{C}} (F_1, F_2) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Divergensteoremet

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV$$

Stokes' teorem

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS$$