Oppgave 1 ***Oppgaven blir automatisk rettet.***

a) *Én* av disse mengdene er *ikke* sammenhengende. Hvilken?

i) Planet uten origo

ii) Planet uten første kvadrant

iii) Planet uten x-aksen

iv) Rommet uten x-aksen

b) *Én* av disse mengdene er *enkelt*sammenhengende. Hvilken?

i) Planet uten origo

ii) Rommet uten origo

iii) Rommet uten x-aksen

iv) Rommet uten xy-planet

c) *Én* av disse påstandene er alltid sann. Hvilken?

i) Et konservativt vektorfelt er rotasjonsfritt

ii) Et konservativt vektorfelt er divergensfritt

iii) Et rotasjonsfritt vektorfelt er konservativt

iv) Et divergensfritt vektorfelt er konservativt

d) Du har et glatt vektorfelt $\mathbf{F}$ definert på en åpen mengde U i rommet, og finner ut at $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Hva må du kreve for å være sikker på at det nødvendigvis finnes en skalar funksjon φ slik at $\mathbf{F} = \nabla\varphi$?

i) U er lukket

ii) U er sammenhengende

iii) U er enkeltsammenhengende

iv) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$

e) *Én* av disse funksjonene er et potensial for $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$ i planet. Hvilken?

i) $\psi(x, y) = x - y$

ii) $\psi(x, y) = x^2 - y^2$

iii) $\psi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$

iv) $\psi(x, y) = -xy$

Oppgave 2 Funksjonen T måler temperaturen i en kubeformet vanntank, som opptar området K beskrevet av ulikhetene

$$0 \leq x \leq 10, \qquad 0 \leq y \leq 10, \qquad 0 \leq z \leq 10$$

i rommet.

Altså betyr $T(x, y, z)$ temperaturen i punktet $(x, y, z) \in K$, og vi antar at T er kontinuerlig deriverbar.

a) Vi har et antall temperatursensorer i tanken, som viser at

$$T(5,5,5) = 10 \quad \text{og} \quad \begin{aligned} T(6,5,5) &= 11 \\ T(5,6,5) &= 12 \\ T(5,5,4) &= 11.5 \end{aligned}$$

i) Bruk disse målingene til å finne en tilnærming til de tre partiellderiverte T_x, T_y og T_z i punktet $\mathbf{p} = (5, 5, 5)$.

ii) Finn deretter en tilnærming til gradienten i samme punkt.

b) I punktet $\mathbf{q} = (2, 1, 2)$ kan vi måle direkte at $\nabla T(\mathbf{q}) = (1, -1, 2)$

i) Hva blir stigningstallet til temperaturen i retningen $\mathbf{v} = (1, 2, -1)/\sqrt{6}$?

ii) Hva med i en retning $\mathbf{w}$ som tangerer nivåflaten $T(x, y, z) = T(\mathbf{q})$ i punktet?

iii) I samme retning som $\nabla T(\mathbf{q})$?

c) Tilsvarende måler vi også at $T(\mathbf{r}) = 10.5$ og $\nabla T(\mathbf{r}) = (-1, 2, 1)$ i punktet $\mathbf{r} = (8, 9, 7)$. Bruk dette til å finne lineærtilnærmet temperatur i punktet $(9, 8, 9)$.

Oppgave 3 La funksjonen f være definert ved

$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)e^{y-x}$$

i hele planet.

a) Hva er de kritiske punktene til f?

b) Finn Hessematrisen $H(x, y)$

c) Klassifiser de kritiske punktene du fant i a).

(Hvis du *ikke* fikk til a) kan du i stedet klassifisere punktene $(-1, 0)$ og $(1, 0)$ som om de var kritiske punkter.)

d) Hva er største og minste verdi til f på enhetsdisken $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$?

Oppgave 4 ***Oppgaven blir automatisk rettet, og alle svarene blir heltall.***

(Det er tillatt å levere skriftlig besvarelse for manuell retting. Da holder det ikke lenger kun å finne rett verdi, og vi ser bort fra svarfeltet.)

Beregn følgende itererte integraler:

a)

$$\int_1^5 \int_1^3 (x + y)\, dx\, dy.$$

b)

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} 48xy\, dx\, dy$$

La T være legemet beskrevet av ulikhetene $x^2 + y^2 \leq 2$ og $x \leq z \leq 5$.

c) Hva blir $\displaystyle\iiint_T \frac{1}{\pi}\, dV$?

d) Hva med $\displaystyle\iiint_T \sin(y)\, dV$?

Oppgave 5 La S være den parametriske flaten gitt ved

$$\mathbf{r}(u, v) = A(\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), \cos(u))$$

for $u, v \in (0, \pi/2)$. Her er $A > 0$ en konstant.

a) *i)* Beskriv hva slags flate dette er

ii) Lag en skisse av flaten når $A = 2$. Figuren bør inneholde koordinataksene.

b) Beregn de to partiellderiverte $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

Vi orienterer nå S slik at enhetsnormalen har *negativ* z-komponent.

Det oppgis også at $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = A^2\Big(\sin(u)^2\cos(v), \sin(u)^2\sin(v), \cos(u)\sin(u)\Big)$

c) Fluksen til vektorfeltet $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ gjennom flaten S kan finnes ved å regne ut et iterert integral på formen

$$\int_a^b \int_{c(v)}^{d(v)} f(u,v)\,du\,dv,$$

der a og b er konstanter, og c, d kan (potensielt) avhenge av v. Skriv ned dette integralet.

d) Evaluer integralet du fant i c

(Med god forståelse kan du også finne verdien uten å beregne integralet direkte.)

Oppgave 6 Paraboloiden $3z = 4(x^2 + y^2) - 1$ og den parabolske sylinderen $z = 1 - 4x^2$ skjærer hverandre langs en lukket kurve C, som orienteres mot klokken sett ovenfra.

a) Vis at C kan parametriseres ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\cos(t), \sin(t), \sin(t)^2\right)$$

for $0 \leq t \leq 2\pi$. Det holder å vise at begge likningene er oppfylt.

b) Beregn sirkulasjonen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (-yz, xz, 1)$ rundt C.

(Det vil si, finn verdien til linjeintegralet $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.)

c) Finn divergensen og rotasjonen til vektorfeltet $\mathbf{F}$.

Kall den delen av paraboloiden som ligger *innenfor* skjæringskurven for S, og definer vektorfeltet $\mathbf{G}(x,y,z) = (-x, -y, 2z)$.

d) Beregn flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er oppoverpekende enhetsnormalvektor på S.

Formelliste

Andrederiverttesten for funksjoner av to variabler er basert på

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Sylinderkoordinater (r, θ, z)

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\sin(\theta), \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad dV = r\,dr\,dz\,d\theta \\ z &= z, \end{aligned}$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ)

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin(\varphi)\cos(\theta), \\ y &= \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad dV = \rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ z &= \rho\cos(\varphi), \end{aligned}$$

Variabelskifte

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv, \qquad \text{der} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

og tilsvarende for flere variabler

Flateintegral

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv, \qquad \text{eller} \qquad dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|}\,dx\,dy$$

Greens teorem

$$\oint_{\mathcal{C}} (F_1, F_2) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Divergensteoremet

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV$$

Stokes' teorem

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS$$