Oppgave 1

a) *Én* av disse likningene beskriver en sfære i rommet. Hvilken?

i) $\rho = \sin(\phi)$ i kulekoordinater.

ii) $x^2 + y^2 = z^2$ i kartesiske koordinater.

iii) $\rho^2 = 7 + 6\rho\cos(\phi)$ i kulekoordinater.

iv) $z^2 + r^2 + 2 = 0$ i sylinderkoordinater.

v) $(x - y)(x + y) + z^2 = y^2$ i kartesiske koordinater.

b) *Én* av disse likningene beskriver en sirkulær sylinder med akse langs x-aksen (obs!). Hvilken?

i) $x^2 + y^2 = 2^2$ i kartesiske koordinater.

ii) $r = 3$ i sylinderkoordinater.

iii) $r^2 - \cos(\theta)^2 r^2 + z^2 = 2^2$ i sylinderkoordinater

iv) $\rho = \dfrac{1}{\sin(\phi)}$ i kulekoordinater

v) $x^2 + z^2 = 2^2$ i kartesiske koordinater.

Oppgave 2 La f være definert ved

$$f(x, y) = e^{5-x^2-y^2}$$

i hele planet. Dette uttrykket kan også skrives som $f(\mathbf{x}) = e^{5-|\mathbf{x}|^2}$ med vektornotasjon.

Vi minner om at f har en kvadratisk tilnærming q rundt etterhvert punkt $\mathbf{p}$, gitt ved formelen

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top H(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}),$$

hvor $H(\mathbf{p})$ er Hessematrisen

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

til f i punktet $\mathbf{p}$.

(Husk at $\mathbf{a}^\top A\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (A\mathbf{b})$.)

a) Regn ut gradienten $\nabla f(x, y)$ og Hessematrisen $H(x, y)$.

b) Hva blir den kvadratiske tilnærmingen $q(x, y)$ til f rundt punktet $\mathbf{p} = (1, 2)$? Finn deretter den *lineære* tilnærmingen til f rundt det samme punktet.

c) Hva slags nivåkurver har funksjonen f? Skisser noen av disse kurvene.

d) Finn en likning for linjen som tangerer nivåkurven $f(x, y) = f(\mathbf{p})$ i punktet $\mathbf{p} = (1, 2)$.

Oppgave 3 En funksjon f er definert ved

$$f(x, y) = \left(1 + 4x^2 + 4y^2\right)(1 + x)$$

i hele planet.

a) Finn alle de kritiske punktene til f.

b) Regn ut Hessematrisen $H(x, y)$. Benytt denne til å klassifisere de kritiske punktene du fant i a).

La $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ være enhetsdisken, som da har enhetssirkelen C som rand.

c) Hvor på C tar f sin største og minste verdi?

d) Hva er globalt maksimum og minimum for f på D?

Oppgave 4 ***Oppgaven blir automatisk rettet, og alle svarene blir heltall.***

a) Regn ut $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{3y} 1\, dx\, dy\, dz$

b) Et legeme T er gitt ved ulikhetene $1 \leq z \leq 2$ og $x^2 + y^2 \leq 4$ i kartesiske koordinater.

Beregn integralet $\displaystyle\iiint_T \frac{1}{\pi}\, dV$.

c) Hva blir $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-y}^1 3\pi \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx\, dy$?

d) La D være disken med sentrum i origo og radius 5. Regn ut dobbeltintegralet

$$\iint_D \left(\sin(x^5) - \frac{1}{5\pi}\right) dA$$

Oppgave 5 La S være den parametriske flaten gitt ved

$$\mathbf{r}(u,v) = \left(\cos(u)v, \sin(u)v, \frac{1}{2}v^2\right)$$

for $0 \le u \le \pi$ og $\sqrt{3} \le v \le 2\sqrt{2}$.

a) Lag en skisse av flaten. Figuren bør inneholde koordinataksene.

b) Beregn de to partiellderiverte $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

c) Finn den oppoverpekende enhetsnormalen til S i punktet $(-\sqrt{3}, 1, 2)$.
(Oppoverpekende betyr positiv z-komponent.)

d) Regn ut (overflate)arealet til flaten S.

Oppgave 6 Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xz, yz, \frac{x^2+y^2}{2} - z^2\right)$$

i hele rommet.

a) Beregn divergensen og rotasjonen til $\mathbf{F}$.

b) Er $\mathbf{F}$ et konservativt vektorfelt? Hvis ja, finn en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$.

Et legeme T er begrenset av den sirkulære sylinderen $x^2 + y^2 = 1$, xy-planet og planet $z = 1$. Randen S orienteres med *utoverpekende* normal, og kan deles inn i tre naturlige deler S_{bunn}, S_{vegg} og S_{topp}.

c) Randen til S_{topp} er en orientert kurve C. Hva blir sirkulasjonen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

rundt denne kurven?

d) Regn ut fluksen til $\mathbf{F}$ gjennom S_{vegg}.
Hint: Bruk gjerne divergensteoremet.

Formelliste

Andrederiverttesten for funksjoner av to variabler er basert på

$$\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

Sylinderkoordinater (r, θ, z)

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\sin(\theta), \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad dV = r\,dr\,dz\,d\theta \\ z &= z, \end{aligned}$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ)

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin(\varphi)\cos(\theta), \\ y &= \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad dV = \rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ z &= \rho\cos(\varphi), \end{aligned}$$

Variabelskifte

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv, \qquad \text{der} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

og tilsvarende for flere variabler

Flateintegral

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv, \qquad \text{eller} \qquad dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|}\,dx\,dy$$

Greens teorem

$$\oint_{\mathcal{C}} (F_1, F_2) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Divergensteoremet

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV$$

Stokes' teorem

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS$$