Oppgave 1

a) *Én* av disse likningene beskriver en sfære i rommet. Hvilken?

i) $\rho = \sin(\phi)$ i kulekoordinater.

ii) $x^2 + y^2 = z^2$ i kartesiske koordinater.

iii) $\rho^2 = 7 + 6\rho\cos(\phi)$ i kulekoordinater.

iv) $z^2 + r^2 + 2 = 0$ i sylinderkoordinater.

v) $(x - y)(x + y) + z^2 = y^2$ i kartesiske koordinater.

Retteveiledning Det rette svaret er iii).

i) De tre punktene $\pm\mathbf{i}$ og $\mathbf{0}$ løser likningen, og ligger på samme linje (x-aksen). Det er umulig for en linje å skjære en sfære i tre punkter.

ii) Dette er en sirkulær kjegle med akse langs z-aksen.

iii) Kan skrives om til $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4^2$, som er standardlikningen for en sfære med sentrum i $3\mathbf{k}$ og radius 4.

iv) Denne likningen har ingen løsninger.

v) Kan skrives om til $x^2 + z^2 = 2y^2$, som er en sirkulær kjegle med akse langs y-aksen. △

b) *Én* av disse likningene beskriver en sirkulær sylinder med akse langs x-aksen (obs!). Hvilken?

i) $x^2 + y^2 = 2^2$ i kartesiske koordinater.

ii) $r = 3$ i sylinderkoordinater.

iii) $r^2 - \cos(\theta)^2 r^2 + z^2 = 2^2$ i sylinderkoordinater

iv) $\rho = \dfrac{1}{\sin(\phi)}$ i kulekoordinater

v) $x^2 + z^2 = 2^2$ i kartesiske koordinater.

Retteveiledning Det rette svaret er iii).

i) Dette er en sylinder, men aksen er langs z-aksen.

ii) Samme som over.

iii) Kan skrives om til $y^2 + z^2 = 2^2$, som beskriver en sylinder av typen vi er ute etter.

iv) Beskriver igjen en sylinder med akse langs z-aksen.

v) Akse langs y-aksen. △

Oppgave 2 La f være definert ved

$$f(x, y) = e^{5-x^2-y^2}$$

i hele planet. Dette uttrykket kan også skrives som $f(\mathbf{x}) = e^{5-|\mathbf{x}|^2}$ med vektornotasjon.

Vi minner om at f har en kvadratisk tilnærming q rundt etterhvert punkt $\mathbf{p}$, gitt ved formelen

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{p})^\top H(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}),$$

hvor $H(\mathbf{p})$ er Hessematrisen

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

til f i punktet $\mathbf{p}$.

(Husk at $\mathbf{a}^\top A\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (A\mathbf{b})$.)

a) Regn ut gradienten $\nabla f(x, y)$ og Hessematrisen $H(x, y)$.

Retteveiledning Her finner vi

$$\nabla f(x, y) = -2e^{5-x^2-y^2}(x, y)$$

og

$$H(x, y) = 2e^{5-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 2x^2 - 1 & 2xy \\ 2xy & 2y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

△

b) Hva blir den kvadratiske tilnærmingen $q(x, y)$ til f rundt punktet $\mathbf{p} = (1, 2)$? Finn deretter den *lineære* tilnærmingen til f rundt det samme punktet.

Retteveiledning Setter vi inn i formelen finner vi

$$q(x,y) = 1 - 2(x-1) - 4(y-2) + (x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + 7(y-2)^2$$
$$(= 56 - 20x - 40y + x^2 + 8xy + 7y^2)$$

der de tre første leddene

$$l(x,y) = 1 - 2(x-1) - 4(y-2)$$
$$(= 11 - 2x - 4y)$$

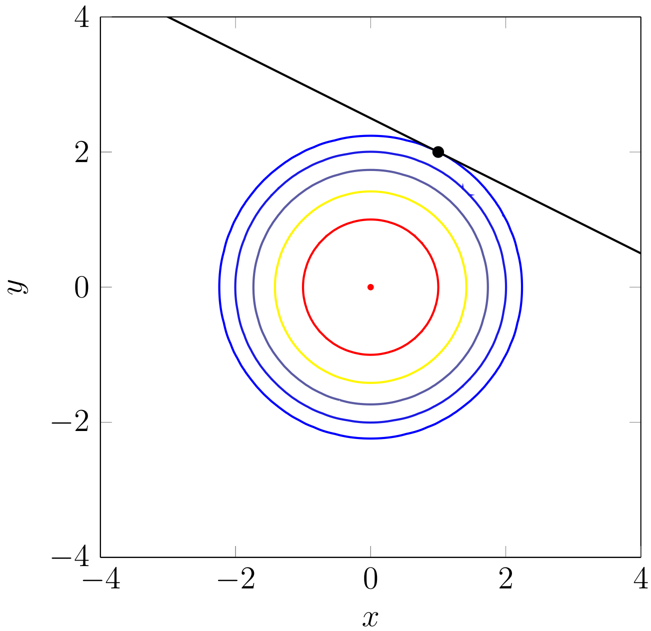
er den lineære tilnærmingen. △

c) Hva slags nivåkurver har funksjonen f? Skisser noen av disse kurvene.

Retteveiledning Vi ser på likningen

$$f(x,y) = e^{5-x^2-y^2} = c$$

for ulike verdier av c.



Figur 1: Nivåkurvene $f = e^j$ for $j = 0, 1 \ldots, 5$, samt tangentlinjen i $(1,2)$.

Siden $0 < f(x,y) \leq e^5$ for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, har likningen ingen løsninger dersom $c \leq 0$ eller $c > e^5$. Anta derfor at $c = e^{5-a^2}$ for $a \geq 0$. Da blir likningen ekvivalent med $x^2 + y^2 = a^2$, som beskriver enten origo ($a = 0$) eller en sirkel med radius a og sentrum i origo ($a > 0$). △

d) Finn en likning for linjen som tangerer nivåkurven $f(x, y) = f(\mathbf{p})$ i punktet $\mathbf{p} = (1, 2)$.

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Vi vet at $\nabla f(\mathbf{p})$ er en normalvektor for nivåkurven i $\mathbf{p}$. Dermed er

$$0 = (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \nabla f(\mathbf{p})$$

en likning for denne tangentlinjen. Om vi setter inn ser vi at likningen er ekvivalent med

$$x + 2y = 5.$$

$\triangle$

Oppgave 3 En funksjon f er definert ved

$$f(x, y) = \left(1 + 4x^2 + 4y^2\right)(1 + x)$$

i hele planet.

a) Finn alle de kritiske punktene til f.

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Vi finner

$$\nabla f(x, y) = (12x^2 + 8x + 1 + 4y^2, 8y(1 + x)).$$

Likningen $\partial_y f = 0$ er tilfredstilt hvis og bare hvis enten $x = -1$ eller $y = 0$. I første fall er

$$\partial_x f = 5 + 4y^2 > 0,$$

slik at det ikke leder til noen kritiske punkter. I det andre tilfellet er $y = 0$. Da er $\partial_x f = 0$ hvis og bare hvis

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{24} = \frac{-2 \pm 1}{6}.$$

De kritiske punktene til f er derfor $\mathbf{p} = (-1/2, 0)$ og $\mathbf{q} = (-1/6, 0)$. $\triangle$

b) Regn ut Hessematrisen $H(x, y)$. Benytt denne til å klassifisere de kritiske punktene du fant i a).

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Hessematrisen blir

$$H(x, y) = D\nabla f(x, y) = 8 \begin{pmatrix} 1 + 3x & y \\ y & 1 + x \end{pmatrix}$$

i hvert punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Produktet av egenverdiene til H blir

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det H(x, 0) = 8^2(1 + 3x)(1 + x)$$

langs x-aksen. Spesielt er $\lambda_1 \lambda_2 = -16 < 0$ i $\mathbf{p}$, som dermed er et sadelpunkt.

I $\mathbf{q}$ er $\lambda_1 \lambda_2 = 80/3 > 0$, som derfor må være en lokal ekstremverdi. Ved å observere at $\partial_x^2 f(\mathbf{q}) = H_{11}(\mathbf{q}) = 4 > 0$ kan vi konkludere at $\mathbf{q}$ er et lokalt minimum. △

La $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ være enhetsdisken, som da har enhetssirkelen C som rand.

c) Hvor på C tar f sin største og minste verdi?

Retteveiledning På C er $x^2 + y^2 = 1$, og derfor er $f(x, y) = g(x) = 5(1 + x)$ der. Siden g er økende ser vi at største og minste verdi antas henholdsvis når $x = +1$ og $x = -1$. Den største verdien til f på C er dermed 10 i $(1, 0)$, og den minste er 0 i $(-1, 0)$.

En variant av dette argumentet over bruker polarkoordinater i stedet. På enhetssirkelen er

$$f(\cos(\theta), \sin(\theta)) = 5(1 + \cos(\theta)),$$

og man er igjen tilbake til en funksjon i én variabel.

En annen fremgangsmåte er å benytte Lagranges metode. Vi må da løse likningssystemet

$$12x^2 + 8x + 1 + 4y^2 = 2\lambda x, \tag{1}$$
$$8y(1 + x) = 2\lambda y, \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3}$$

Fra (2) har vi at enten er $y = 0$, eller så er $\lambda = 4(1 + x)$. Setter vi inn sistnevnte i (1) finner vi likningen $4x^2 + 4y^2 = -1$, som ikke har noen løsninger. La oss derfor undersøke tilfellet $y = 0$. Da gir (3) at $x = \pm 1$, og man kan også sette inn i (1) for å finne tilhørende λ. Uansett er $(\pm 1, 0)$ de kritiske punktene. Ved å så sjekke verdien i punktene har vi igjen samme konklusjon.

△

d) Hva er globalt maksimum og minimum for f på D?

Retteveiledning En global ekstremverdi vil enten svare til et punkt på randen, eller et indre kritisk punkt. Her vet vi allerede at $\mathbf{p}$ er et sadelpunkt, så dette punktet kan forkastes, mens det lokale minimumet $\mathbf{q}$ potensielt sett kan gi et bedre globalt minimum. Vi trenger derfor bare beregne

$$f(\mathbf{q}) = \left(\frac{1}{9} + 1\right)\frac{5}{6} = \frac{25}{27},$$

som ikke "slår" verdien vi fant på randen ($f(-1,0) = 0$).

De globale ekstremverdiene på D antas derfor på C, og er de samme som i c). △

Oppgave 4 ***Oppgaven blir automatisk rettet, og alle svarene blir heltall.***

a) Regn ut $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{3y} 1\, dx\, dy\, dz$

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ 14 △

b) Et legeme T er gitt ved ulikhetene $1 \leq z \leq 2$ og $x^2 + y^2 \leq 4$ i kartesiske koordinater. Beregn integralet $\displaystyle\iiint_T \frac{1}{\pi}\, dV$.

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Legemet er en sylinder med radius 2 og høyde 1, og har derfor volum 4π. Svaret blir altså 4. △

c) Hva blir $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-y}^1 3\pi \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx\, dy$?

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Ved å bytte integrasjonsrekkefølge finner vi

$$\int_{-1}^0 \int_{-y}^1 3\pi \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx\, dy = \int_0^1 \int_{-x}^0 3\pi \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dy\, dx = 3$$

△

d) La D være disken med sentrum i origo og radius 5. Regn ut dobbeltintegralet

$$\iint_D \left(\sin(x^5) - \frac{1}{5\pi}\right) dA$$

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Integralet av $\sin(x^5)$ over disken blir 0, siden funksjonen er odde og området er symmetrisk om y-aksen. Svaret blir da -5, siden arealet av disken er 25π. △

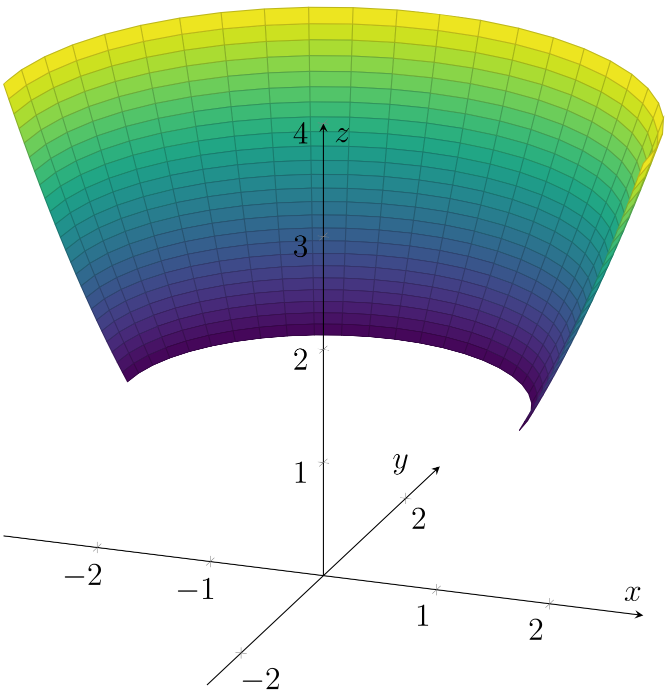
Oppgave 5 La S være den parametriske flaten gitt ved

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\cos(u)v, \sin(u)v, \frac{1}{2}v^2\right)$$

for $0 \leq u \leq \pi$ og $\sqrt{3} \leq v \leq 2\sqrt{2}$.

a) Lag en skisse av flaten. Figuren bør inneholde koordinataksene.

Retteveiledning



Figur 2: Den parametriske flaten.

△

b) Beregn de to partiellderiverte $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ og $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

Retteveiledning Her finner man

$$\partial_u \mathbf{r} = (-\sin(u)v, \cos(u)v, 0)$$
$$\partial_v \mathbf{r} = (\cos(u), \sin(u), v)$$

△

c) Finn den oppoverpekende enhetsnormalen til S i punktet $(-\sqrt{3}, 1, 2)$.
(Oppoverpekende betyr positiv z-komponent.)

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Vi regner ut

$$\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r} = (\cos(u)v^2, \sin(u)v^2, -v),$$

som har lengde $|\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}| = v\sqrt{1+v^2}$, slik at oppoverpekende enhetsnormal i $\mathbf{r}(u,v)$ blir

$$\frac{(-\cos(u)v, -\sin(u)v, 1)}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Punktet vårt svarer til $u = 5\pi/6$ og $v = 2$, så

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\left(\sqrt{3}, -1, 1\right)}{\sqrt{5}}$$

er enhetsnormalen vi er ute etter.

Alternativt kan man innse at S er en del av nivåflaten $f(x,y,z) = 2z - x^2 - y^2 = 0$, og så finne normalvektor ved å ta gradienten. △

d) Regn ut (overflate)arealet til flaten S.

$\boxed{\textit{Retteveiledning}}$ Fra løsningen på forrige deloppgave kan vi umiddelbart lese av at

$$dS = |\partial_u \mathbf{r} \times \partial_v \mathbf{r}|\, du\, dv = v\sqrt{1+v^2}\, du\, dv.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} |S| &= \int_S dS = \int_0^{\pi} \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} v\sqrt{1+v^2}\, dv\, du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{2^2}^{3^2} t^{1/2}\, dt = \frac{\pi}{3}\left(3^3 - 2^3\right) \\ &= \frac{19\pi}{3}, \end{aligned}$$

hvor vi har utført substitusjonen $t = 1 + v^2$ i andre linje. △

Oppgave 6 Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xz, yz, \frac{x^2+y^2}{2} - z^2\right)$$

i hele rommet.

a) Beregn divergensen og rotasjonen til $\mathbf{F}$.

Retteveiledning Her er

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{F} &= \partial_x(xz) + \partial_y(yz) + \partial_z\left(\frac{x^2+y^2}{2} - z^2\right)\\ &= z + z - 2z = 0\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{F} &= (\partial_y F_3 - \partial_z F_2, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, \partial_x F_2 - \partial_y F_1)\\ &= (y-y, x-x, 0-0) = \mathbf{0},\end{aligned}$$

så vektorfeltet $\mathbf{F}$ er både divergens- og rotasjonsfritt. △

b) Er $\mathbf{F}$ et konservativt vektorfelt? Hvis ja, finn en potensialfunksjon for $\mathbf{F}$.

Retteveiledning $\mathbf{F}$ må være konservativt, siden $\mathbf{F}$ er glatt og rotasjonsfritt, og $\mathbb{R}^3$ er (trivielt) enkeltsammenhengende.

For å finne en potensialfunksjon φ slik at $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ kan vi benytte at

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

uavhengig av vei. Ved å *velge* $\varphi(\mathbf{0}) = 0$ og den rette linjen $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{x}$ $(0 \le t \le 1)$ finner vi

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \int_0^1 t^2\left(xz, yz, \frac{x^2+y^2}{2} - z^2\right)\cdot(x,y,z)\,dt\\ &= \frac{1}{3}\left(x^2z + y^2z + \frac{1}{2}(x^2+y^2)z - z^3\right)\\ &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)z - \frac{1}{3}z^3.\end{aligned}$$

Alternativt kan man løse likningen $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ direkte. △

Et legeme T er begrenset av den sirkulære sylinderen $x^2+y^2 = 1$, xy-planet og planet $z = 1$. Randen S orienteres med *utoverpekende* normal, og kan deles inn i tre naturlige deler S_{bunn}, S_{vegg} og S_{topp}.

c) Randen til S_{topp} er en orientert kurve C. Hva blir sirkulasjonen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

rundt denne kurven?

Retteveiledning Siden $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt er sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ rundt enhver lukket kurve 0. Spesielt er dette tilfelle for C også.

En alternativ måte å se dette på er at

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_{\text{topp}}} \overbrace{\operatorname{curl}\mathbf{F}}^{=\mathbf{0}} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

fra Stokes' teorem og a). △

d) Regn ut fluksen til $\mathbf{F}$ gjennom S_{vegg}.

Hint: Bruk gjerne divergensteoremet.

Retteveiledning Fra divergensteoremet er

$$0 = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \left(\iint_{S_{\text{bunn}}} + \iint_{S_{\text{vegg}}} + \iint_{S_{\text{topp}}} \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Orienteringen gjør at flatene S_{bunn} og S_{topp} har enhetsnormalvektor henholdsvis $-\mathbf{k}$ og $+\mathbf{k}$. Begge har enhetsdisken

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

som sin projeksjon ned i xy-planet. Dermed er

$$\begin{aligned}
\iint_{S_{\text{bunn}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= -\iint_D \left(0, 0, \frac{x^2+y^2}{2}\right) \cdot \mathbf{k}\, dA = -\iint_D \frac{x^2+y^2}{2}\, dA \\
\iint_{S_{\text{topp}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left(x, y, \frac{x^2+y^2}{2} - 1\right) \cdot \mathbf{k}\, dA = +\iint_D \frac{x^2+y^2}{2}\, dA - |D|,
\end{aligned}$$

og derfor

$$\begin{aligned}
\iint_{S_{\text{vegg}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= -\left(\iint_{S_{\text{bunn}}} + \iint_{S_{\text{topp}}} \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\
&= |D| = \pi,
\end{aligned}$$

siden integralene kansellerer.

Alternativt kan man regne ut fluksen direkte. Vi kan for eksempel parametrisere S_{vegg} med

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$$

for $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ ved hjelp av sylinderkoordinater. Vi finner da

$$\partial_\theta \mathbf{r} \times \partial_z \mathbf{r} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0),$$

som peker i riktig retning, og gir

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot (\partial_\theta \mathbf{r} \times \partial_z \mathbf{r}) = z.$$

Vi har dermed

$$\iint_{S_{\text{vegg}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \, dz \, d\theta = \pi,$$

akkurat som over. △

Formelliste

Andrederiverttesten for funksjoner av to variabler er basert på

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Sylinderkoordinater (r, θ, z)

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\sin(\theta), \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad dV = r\,dr\,dz\,d\theta \\ z &= z, \end{aligned}$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ)

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin(\varphi)\cos(\theta), \\ y &= \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad dV = \rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta \\ z &= \rho\cos(\varphi), \end{aligned}$$

Variabelskifte

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv, \qquad \text{der} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

og tilsvarende for flere variabler

Flateintegral

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv, \qquad \text{eller} \qquad dS = \frac{|\nabla G|}{|G_z|}\,dx\,dy$$

Greens teorem

$$\oint_{\mathcal{C}} (F_1, F_2) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Divergensteoremet

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV$$

Stokes' teorem

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\,dS$$