Oppgave 1

(a) $f_x(P) = (y(z^2-1))_P = 45$, $f_y(P) = (x(z^2-1))_P = 30$ og $f_z(P) = (2xyz)_P = 48$, så en likning for tangentplanet til S i P er:

$$\underline{\underline{45(x-2)+30(y-3)+48(z-4)=0}}, \quad \text{dvs.:} \quad \underline{\underline{15(x-2)+10(y-3)+16(z-4)=0}},$$

$$\text{dvs.:} \quad \underline{\underline{15x+10y+16z=124}}.$$

(b) Fra (a) har vi at $\nabla f(P) = 45\vec{\imath} + 30\vec{\jmath} + 48\vec{k}$, og dermed er

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \frac{45\vec{\imath}+30\vec{\jmath}+48\vec{k}}{\sqrt{45^2+30^2+48^2}} = \frac{45\vec{\imath}+30\vec{\jmath}+48\vec{k}}{3\sqrt{581}} = \underline{\underline{\frac{15}{\sqrt{581}}\vec{\imath} + \frac{10}{\sqrt{581}}\vec{\jmath} + \frac{16}{\sqrt{581}}\vec{k}}}.$$

(c) Den maksimale økningsraten for f i P er $|\nabla f(P)| = \underline{\underline{3\sqrt{581}}}$.

(d) Enhetsvektoren i retningen fra P og rett mot origo er

$$\vec{w} = \frac{-2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-4\vec{k}}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{-2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-4\vec{k}}{\sqrt{29}} = -\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{\imath} - \frac{3}{\sqrt{29}} - \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}\ ,$$

og dermed er

$$D_{\vec{w}}f(P) = \nabla f(P)\cdot\vec{w} = (45\vec{\imath}+30\vec{\jmath}+48\vec{k})\cdot(-\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{\imath} - \frac{3}{\sqrt{29}} - \frac{4}{\sqrt{29}}\vec{k}) =$$

$$= -\frac{90}{\sqrt{29}} - \frac{90}{\sqrt{29}} - \frac{192}{\sqrt{29}} = \underline{\underline{-\frac{372}{\sqrt{29}}}}.$$

Oppgave 2

T er et tetraeder, og de fire hjørnene finner vi ved å løse tre-og-tre av likningene til de fire gitte planene. Dette gir de fire punktene $P_1 : (0,0,0)$, $P_2 : (0,0,2)$, $P_3 : (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ og $P_4 : (0, \frac{2}{5}, \frac{8}{5})$. Vi ser at P_1 og P_2 har samme xy-projeksjon, så xy-projeksjonen T_{xy} av T er trekanten med hjørner $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ og $(0, \frac{2}{5})$. Linja gjennom $(\frac{1}{2}, 0)$ og $(0, \frac{2}{5})$ har likningen $y = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}x$. Ved å integrere først m.h.p. z (fra $z = 3x+4y$ til $z = 2-x-y$), så m.h.p. y (fra $y = 0$ til $y = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}x$), og til slutt m.h.p. x (fra 0 til $\frac{1}{2}$) får vi denne oppstillingen

$$V_T = \iiint_T dV = \iint_{T_{xy}} \int_{3x+4y}^{2-x-y} dz\,dA = \underline{\underline{\int_0^{1/2}\int_0^{\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x}\int_{3x+4y}^{2-x-y} dz\,dy\,dx}} =$$

$$= \int_0^{1/2}\int_0^{\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x} ((2-x-y)-(3x+4y))\,dy\,dx = \int_0^{1/2}\int_0^{\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x} (2-4x-5y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[2y - 4xy - \frac{5}{2}y^2\right]_0^{\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x} dx =$$

$$= \int_0^{1/2} (2(\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x) - 4x(\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x) - \frac{5}{2}(\frac{2}{5}-\frac{4}{5}x)^2)dx = \frac{2}{5}\int_0^{1/2}(1-4x+4x^2)dx =$$

$$= \frac{2}{5}\left[x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^{1/2} = \frac{2}{5}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \underline{\underline{\frac{1}{15}}} \; .$$

Oppgave 3

(a) Kuleflatens likning i sylinderkoordinater: $r^2 + (z-1)^2 = 1$, dvs.: $z = 1 - \sqrt{1-r^2}$ (nedre halvkule), slik at:

$$V_T = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV = \underline{\underline{\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^1 (r^2 + z^2) r \, dz \, dr \, d\theta}}$$

(b) T er avgrenset av planet $z = 1$, som i kulekoordinater har likningen $\rho \cos \phi = 1$, dvs. $\rho = 1/\cos\phi$, og kuleflaten $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, dvs. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, som i kulekoordinater har likningen $\rho^2 = 2\rho\cos\phi$ dvs.: $\rho = 2\cos\phi$. Den førstnevnte er øvre integrasjonsgrense for ρ når $0 \le \phi \le \pi/4$ og $0 \le \theta \le 2\pi$, og den sistnevnte er øvre integrasjonsgrense for ρ når $\pi/4 \le \phi \le \pi/2$ og $0 \le \theta \le 2\pi$ (tegn figur!), slik at:

$$V_T = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV = \iiint_T \rho^2 dV = \iiint_T \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \iiint_T \rho^4 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta =$$

$$= \underline{\underline{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\phi} \rho^4 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\phi} \rho^4 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta}} \; .$$

Oppgave 4

(a) $$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+z^2} + 0 + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x^2+z^2} = \frac{z^2 - x^2}{(x^2+z^2)^2} + \frac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2} = \underline{\underline{0}},$$

$$\text{og } \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{x}{x^2+z^2} & 0 & \frac{z}{x^2+z^2} \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} - (\frac{-2xz}{(x^2+z^2)^2} - \frac{-2xz}{(x^2+z^2)^2})\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \underline{\underline{\vec{0}}}.$$

(b) $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{0}}$, fordi C_1 er en lukket kurve i det "øvre halvrommet" $z > 0$, som er enkeltsammenhengende, så feltet er konservativt fordi det er curlfritt der.

(c) Vi beregner arbeidsintegralet $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ v.h.a. denne parametriseringen av C_2:

$$C_2 : \vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \sin t\,\vec{k}, \quad t : 0 \to 2\pi \; .$$

Vi ser at denne parametriseringen følger den angitte orienteringen av C_2, da $\vec{r}(0) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ og $\vec{r}(\pi/2) = 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ (tegn figur!), så vi får:

$$\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{k}) \cdot (-\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{k}) \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) \, dt = \underline{\underline{0}} \; .$$

(d) En eventuell potensialfunksjon f for $\vec{F}$ må være slik at $f_x(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+z^2}$, $f_y(x,y,z) = 0$ og $f_z(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+z^2}$ i hele $\mathbf{R}^3$ unntatt på y-aksen. Det første av disse kravene gir at $f(x,y,z) = \int \frac{x}{x^2+z^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+z^2) + \xi(y,z)$, som videre gir at $f_y(x,y,z) = \frac{\partial \xi}{\partial y}$, som er lik 0 hvis og bare hvis $\xi(y,z) = \zeta(z)$. Dermed får vi videre at $f_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{2}\ln(x^2+z^2) + \zeta(z)) = \frac{z}{x^2+z^2} + \zeta\,'(z)$, som er lik $\frac{z}{x^2+z^2}$ hvis og bare hvis $\zeta\,'(z) = 0$, dvs. at enhver konstant funksjon $\zeta(z)$, dvs. $\zeta(z) = C$, gir en potensialfunksjon for $\vec{F}$: $f(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+z^2) + C$ i hele $\mathbf{R}^3$ unntatt på y-aksen. Konklusjonen er dermed at $\underline{\underline{\vec{F}\text{ er konservativt i hele }\mathbf{R}^3\text{ unntatt på }y\text{-aksen}}}$.

Oppgave 5

Fra $u(x,y) = X(x)Y(y)$ og $u_{xx} + u_{yy} = 0$ følger at $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$, som gjelder i hele R hvis og bare hvis $\frac{X''}{X}$ og $-\frac{Y''}{Y}$ er lik en felles konstant, K, som gir:

$$(1) \quad X'' - KX = 0 \qquad \text{og} \qquad (2) \quad Y'' + KY = 0\ ,$$

for hhv. $0 < x < a$ og $0 < y < b$. Løsningene av (1)-(2) avhenger av fortegnet til K, så vi ser nærmere på de tre mulighetene $K > 0$, $K = 0$ og $K < 0$:

<u>$K > 0$:</u>

Vi setter $K = \kappa^2$, som gir disse generelle løsningene av (1)-(2):

$$(3) \quad X(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} \qquad \text{og} \qquad (4) \quad Y = C\sin\kappa y + D\cos\kappa y\ ,$$

der A, B, C og D er konstanter. Produktfunksjonene $u(x,y) =$ $(Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x})(C\sin\kappa y + D\cos\kappa y)$ oppfyller dermed kravet $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i hele R. Disse oppfyller randbetingelsen $u(x,0) = 0$ for $0 < x < a$ hvis og bare hvis $(Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x})D = 0$ for $0 < x < a$, som betyr at enten er $D = 0$ eller så er $Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} = 0$ for $0 < x < a$, som betyr at $A = B = 0$, dvs. at $u(x,y)$ er lik 0 på hele R. Løsninger med $D = 0$ er disse: $u(x,y) = (A'e^{\kappa x} + B'e^{-\kappa x})\sin\kappa y$ (med $A' = AC$ og $B' = BC$), som oppfyller randbetingelsene $u(0,y) = 0$ og $u(a,y) = 0$ hvis og bare hvis

$$(5) \quad (A' + B')\sin\kappa y = 0 \qquad \text{og} \qquad (6) \quad (A'e^{\kappa a} + B'e^{-\kappa a})\sin\kappa y = 0\ ,$$

som gir $A' = B' = 0$, ettersom $\sin\kappa y$ ikke er konstant lik 0. Dermed er konstantfunksjonen 0 den eneste produktløsningen på R av (1)-(2) med $K > 0$.

<u>$K = 0$:</u>

Her er de generelle løsningene av (1)-(2):

$$(7) \quad X(x) = Ax + B \qquad \text{og} \qquad (8) \quad Y = Cy + D\ ,$$

der A, B, C og D er konstanter. Produktfunksjonene $u(x,y) =$ $= (Ax + B)(Cy + D)$ oppfyller dermed kravet $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i hele R. Disse oppfyller randbetingelsen $u(x,0) = 0$ for $0 < x < a$ hvis og bare hvis $(Ax + B)D = 0$ for $0 < x < a$, som betyr at enten er $D = 0$ eller så er $Ax + B = 0$ for $0 < x < a$, som betyr at $A = B = 0$, dvs. at $u(x,y)$ er lik 0 på hele R. Løsninger med $D = 0$ er disse: $u(x,y) = (A'x + B')y$ (med $A' = AC$ og $B' = BC$), som oppfyller randbetingelsene $u(0,y) = 0$ og $u(a,y) = 0$ hvis og bare hvis

$$(9) \quad B'y = 0 \qquad \text{og} \qquad (10) \quad (A'a + B')y = 0\ ,$$

som gir $A' = B' = 0$, ettersom y ikke er konstant lik 0. Dermed er konstantfunksjonen 0 den eneste produktløsningen på R av (1)-(2) med $K = 0$.

$\underline{K < 0}$:

Vi setter $K = -\kappa^2$, som gir disse generelle løsningene av (1)-(2):

$$(11) \quad X(x) = A\sin\kappa x + B\cos\kappa x \qquad \text{og} \qquad (12) \quad Y = Ce^{\kappa y} + De^{-\kappa y} \ ,$$

der A, B, C og D er konstanter. Produktfunksjonene $u(x, y) = (A\sin\kappa x + B\cos\kappa x)(Ce^{\kappa y} + De^{-\kappa y})$ oppfyller dermed kravet $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i hele R. Disse oppfyller randbetingelsen $u(x, 0) = 0$ for $0 < x < a$ hvis og bare hvis $(A\sin\kappa x + B\cos\kappa x)(C + D) = 0$ for $0 < x < a$, som betyr at enten er $C + D = 0$ eller så er $A\sin\kappa x + B\cos\kappa x = 0$ for $0 < x < a$, som betyr at $A = B = 0$, dvs. at $u(x, y)$ er lik 0 på hele R. Løsninger med $C + D = 0$, dvs. $D = -C$, er disse: $u(x, y) = (A'\sin\kappa x + B'\cos\kappa x)(e^{\kappa y} - e^{-\kappa y})$ (med $A' = AC$ og $B' = BC$), som oppfyller randbetingelsene $u(0, y) = 0$ og $u(a, y) = 0$ hvis og bare hvis

$$(13) \quad B'(e^{\kappa y} - e^{-\kappa y}) = 0 \qquad \text{og} \qquad (14) \quad (A'\sin\kappa a + B'\cos\kappa a)(e^{\kappa y} - e^{-\kappa y}) = 0 \ ,$$

som gir $B' = 0$ og enten $A' = 0$ (som igjen gir den trivielle løsningen som er kontant 0 på R) eller $\sin\kappa a = 0$, dvs. $\kappa = n\pi/a$ der n er et helt tall. Dermed har vi disse løsningene:

$$u(x, y) = \underline{\underline{A'\sin\frac{n\pi x}{a}(e^{-n\pi y/a} - e^{n\pi y/a})}}$$

der A' er en vilkårlig reell konstant og n er et vikårlig helt tall.