Oppgave 1

(a) $f_x(x,y,z) = \dfrac{2x}{y^2+z^2} \quad \Rightarrow \quad f_x(1,1,1) = 1,$

$$f_y(x,y,z) = \frac{2y(y^2+z^2) - 2y(x^2+y^2)}{(y^2+z^2)^2} = \frac{2y(z^2-x^2)}{(y^2+z^2)^2} \quad \Rightarrow \quad f_y(1,1,1) = 0$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{0 - 2z(x^2+y^2)}{(y^2+z^2)^2} \quad \Rightarrow \quad f_y(1,1,1) = -1$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(1,1,1) = \underline{\underline{\vec{\imath} - \vec{k}}}\,.$$

(b) $D_{\vec{v}} f(1,1,1) = \dfrac{\nabla f(1,1,1)\cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{(\vec{\imath}-\vec{k})\cdot(2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+4\vec{k})}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \dfrac{2-4}{\sqrt{29}} = \underline{\underline{\dfrac{-2}{\sqrt{29}}}}\,.$

(c) $\vec{w} = \nabla f(1,1,1) = \underline{\underline{\vec{\imath} - \vec{k}}}$ gir størst mulig verdi for $D_{\vec{w}} f(1,1,1)$.

Oppgave 2

(a) Sirkelbuen er gitt ved: $x^2 + (y-1)^2 = 1$, som sammen med $y \geq 1$ gir: $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$. Dermed har vi:

$$\iint_D y\,dA = \underline{\underline{\int_0^1 \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx}}\,..$$

(b) I polarkoordinater må dobbeltintegralet settes opp som en sum av to deler, under og over linja $\theta = \pi/4$ mellom origo og punktet $(1,1)$. Omskriving av parabellikningen og sirkellikningen til polarkoordinater: $y = x^2 \quad \Rightarrow \quad r\sin\theta = (r\cos\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sin\theta/\cos^2\theta$ og $x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2y \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad r = 2\sin\theta$ som gir:

$$\iint_D y\,dA = \underline{\underline{\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sin\theta/\cos^2\theta} r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta}}\,.$$

(c) Vi bruker oppsettet i (a): $\displaystyle\iint_D y\,dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx =$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 ((1+\sqrt{1-x^2})^2 - (x^2)^2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (2 + 2\sqrt{1-x^2} - x^2 - x^4)dx =$$

$$= \int_0^1 dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+x^4)dx =$$

$$= 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{11}{15} + \frac{\pi}{4}}}\,.$$

Oppgave 3

(a) Hvert punkt (x, y, z) i $\mathbf{R}^3$ kan angis i sylinderkoordinater, r, θ og z, der $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. For et punkt på den omtalte skjæringssirkelen er r (punktets avstand til z-aksen) lik $a + b\cos\alpha$, og punktets z-verdi er $b\sin\alpha$, slik at

$$x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} = r\cos\theta\,\vec{\imath} + r\sin\theta\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} =$$

$$= (a+b\cos\alpha)\cos\theta\,\vec{\imath} + (a+b\cos\alpha)\sin\theta\,\vec{\jmath} + b\sin\alpha\,\vec{k} = \vec{r}(\alpha,\theta) \quad (0 \le \alpha \le 2\pi, 0 \le \theta \le 2\pi).$$

(b) Parametriseringen i (a) gir:

$$\vec{r}_\alpha = -b\sin\alpha\cos\theta\,\vec{\imath} - b\sin\alpha\sin\theta\,\vec{\jmath} + b\cos\alpha\,\vec{k}$$

$$\vec{r}_\theta = -(a+b\cos\alpha)\sin\theta\,\vec{\imath} + (a+b\cos\alpha)\cos\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_\alpha \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -b\sin\alpha\cos\theta & -b\sin\alpha\sin\theta & b\cos\alpha \\ -(a+b\cos\alpha)\sin\theta & (a+b\cos\alpha)\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -b(a+b\cos\alpha)\cos\alpha\cos\theta\,\vec{\imath} - b(a+b\cos\alpha)\cos\alpha\sin\theta\,\vec{\jmath} - b(a+b\cos\alpha)\sin\alpha(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\vec{k} =$$

$$= -b(a+b\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\alpha\sin\theta\,\vec{\jmath} + \sin\alpha\,\vec{k})$$

$$|\vec{r}_\alpha \times \vec{r}_\theta| = |-b(a+b\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\alpha\sin\theta\,\vec{\jmath} + \sin\alpha\,\vec{k})| =$$

$$= b(a+b\cos\alpha)\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\theta + \cos^2\alpha\sin^2\theta + \sin^2\alpha} = b(a+b\cos\alpha)$$

slik at $A_{S_{a,b}} = \iint_D |\vec{r}_\alpha \times \vec{r}_\theta|\,d\alpha\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a+b\cos\alpha)\,d\alpha\,d\theta =$

$$= ab\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha\,d\theta + b^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\alpha\,d\alpha\,d\theta = ab\cdot 2\pi\cdot 2\pi + 0 = \underline{\underline{4\pi^2 ab}}\,.$$

(c) Vi ser at $\vec{r}_\alpha \times \vec{r}_\theta$ er rettet inn i torusen, da $(\vec{r}_\alpha \times \vec{r}_\theta)\cdot\vec{k} = -b(a+b\cos\alpha)\sin\alpha$ er < 0 for $0 < \alpha < \pi$ (på øvre halvdel av torusen) og > 0 for $\pi < \alpha < 2\pi$ (på nedre halvdel av torusen), så ved beregning av utgående fluks må vi korrigere fortegnet med et ekstra minus:

$$\iint_{S_{a,b}} \vec{F}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,dS = -\iint_D \vec{F}(\vec{r}(\alpha,\theta))\cdot\vec{r}_\alpha \times \vec{r}_\theta\,d\alpha\,d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b\sin\alpha\,\vec{k}\cdot(-b(a+b\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\theta\,\vec{\imath} + \cos\alpha\sin\theta\,\vec{\jmath} + \sin\alpha\,\vec{k}))d\alpha\,d\theta =$$

$$= b^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + b\cos\alpha)\sin^2\alpha \, d\alpha \, d\theta = 2\pi b^2 \int_0^{2\pi} (a\sin^2\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha)\, d\alpha =$$

$$= 2\pi ab^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha \, d\alpha + 0 = 2\pi ab^2 \cdot \pi = \underline{\underline{2\pi^2 ab^2}}\,.$$

(d) Divergensen til feltet i(c) er konstant lik 1, så ved Divergensteoremet er volumet av torusen $T_{a,b}$ lik den utgående fluksen som vi beregnet i (c):

$$V_{T_{a,b}} = \underline{\underline{2\pi^2 ab^2}}\,.$$

Oppgave 4

(a) Flaten S kan parametriseres med x og y som parametere, slik:

$$y^2 + z^2 = 4 \wedge z \geq 0 \Rightarrow z = \sqrt{4 - y^2} \Rightarrow \vec{r}(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + \sqrt{4-y^2}\,\vec{k}$$

med definisjonsområde i xy-planet lik sirkelen $S_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$.
Videre har vi: $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = -z_x\,\vec{\imath} - z_y\,\vec{\jmath} + \vec{k} = \dfrac{y}{\sqrt{4-y^2}}\vec{\jmath} + \vec{k}$,
som er oppoverrettet, og dermed positiv m.h.t. den angitte orieinteringen av randkurven C. Dermed gir Stokes' teorem at

$$\oint_C x\,\vec{\jmath} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \cdots = \iint_{S_{xy}} \vec{k} \times \left(\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\vec{\jmath} + \vec{k}\right) dA =$$

$$= \iint_{S_{xy}} dA = A_{S_{xy}} = \pi \cdot 1^2 = \underline{\underline{\pi}}\,.$$

(b) Kurven C ligger på sylinderen $x^2 + y^2 =$, og kan parametriseres med θ slik:

$$\vec{r}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} + \sqrt{4 - \sin^2\theta}\,\vec{k} \quad (\theta : 0 \to 2\pi)$$

som gir: $\vec{r}\,'(\theta) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} - \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}\vec{k}$, og dermed:

$$\oint_C x\,\vec{\jmath} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \cos\theta\,\vec{\jmath} \cdot \left(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}\vec{k}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \underline{\underline{\pi}}$$

Oppgave 5

$u_t = \alpha^2 u_{xx}$ har én produktløsning $u(x,t) = X(x)T(t)$ som oppfyller både randbetingelsene og initialbetingelsen $u(x,0) = a\sin\frac{2\pi}{L}x$, nemlig denne:

$$u(x,t) = a\sin\frac{2\pi}{L}x \cdot e^{-(4\pi^2\alpha^2/L^2)t}$$

som gir: $u(L/4,t) = a\sin\frac{\pi}{2} \cdot e^{-(4\pi^2\alpha^2/L^2)t} = ae^{-(4\pi^2\alpha^2/L^2)t}$.

Starttemperaturen ved $x = L/4$ er: $u(L/4,0) = a\sin\frac{\pi}{2} = a$, så vi skal løse likningen $ae^{-(4\pi^2\alpha^2/L^2)t} = a/2$, dvs. $e^{-(4\pi^2\alpha^2/L^2)t} = 1/2$, dvs. $-(4\pi^2\alpha^2/L^2)t = \ln(1/2) = -\ln 2$, dvs. $(4\pi^2\alpha^2/L^2)t = \ln 2$, som gir

$$t = \underline{\underline{\frac{(\ln 2)L^2}{4\pi^2\alpha^2}}}\,.$$