NTNU I GJØVIK

LØSNINGER
EKSAMEN I MATEMATIKK 3 (REA3011)

7. APRIL 2016

Oppgave 1

(a) $\nabla f(P) = f_x(P)\vec{\imath} + f_y(P)\vec{\jmath} + f_z(P)\vec{k} = (\frac{y^2}{z^3}\vec{\imath} + \frac{2xy}{z^3}\vec{\jmath} + \frac{-3xy^2}{z^4}\vec{k})_P =$

$$= \frac{4}{27}\vec{\imath} + \frac{4}{27}\vec{\jmath} - \frac{4}{27}\vec{k} = \underline{\underline{\frac{4}{27}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k})}}\ .$$

(b) Den lineære approksimasjonen til f i P er funskjonen gitt ved

$$w = f(P) + f_x(P)(x-1) + f_y(P)(y-2) + f_z(P)(z-3) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{27} + \frac{4}{27}(x-1) + \frac{4}{27}(y-2) - \frac{4}{27}(z-3)}} = \underline{\underline{\frac{4}{27}(1 + x + y - z)}}\ .$$

(c) Den maksimale verdien for den retningsderiverte til f i P er

$$|\nabla f(P)| = |\frac{4}{27}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k})| = \underline{\underline{\frac{4}{27}\sqrt{3}}}\ .$$

(d) En likning for tangentplanet i P til nivåflaten til f gjennom P er

$$\frac{4}{27}(x-1) + \frac{4}{27}(y-2) - \frac{4}{27}(z-3) = 0 \quad \text{dvs.:} \quad \underline{\underline{x + y - z = 0}}\ .$$

(e) Enhetsvektoren $\vec{u}$ er $\nabla f(P)$ normert til absoluttverdi 1:

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} = \frac{\frac{4}{27}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k})}{\frac{4}{27}\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k})}}.$$

Oppgave 2

Med Greens teorem får vi:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(8x - y^8) - \frac{\partial}{\partial y}(x^5 + 5y))dA = \iint_D 3dA = 3 \cdot \pi \cdot 3^2 = \underline{\underline{27\pi}}\ .$$

Oppgave 3

Med Divergensteoremet (med T lik legemet avgrenset av kuleflaten S) får vi:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iiint_T 6\, dV = 6V_T = 6 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \underline{\underline{512\pi}}\ .$$

Oppgave 4

(a) Vi kan parametrisere linjestykket C_1 slik: $\vec{r}(t) = (2-2t)\,\vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath}$, $t : 0 \to 1$.
Dette gir: $\int_{C_1} (2y\vec{\imath} + 3x\vec{\jmath}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt =$

$$= \int_0^1 (2 \cdot 2t\vec{\imath} + 3 \cdot (2-2t)\vec{\jmath}) \cdot (-2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})\,dt = \int_0^1 (-8t + 12 - 12t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (12 - 20t)\,dt = 12 - 10 = \underline{\underline{2}}\,.$$

(b) Innsetting av de to punktenes koordinater i de to likningene viser at likningnene blir oppfylt, så begge pnktene ligger på begge flater, og dermed på skjæringskurven mellom dem:

$2^2 + 0^2 = 4, \quad 2 \cdot 2 \cdot 0/(2^2 + 0^2) = 0, \quad 0^2 + 2^2 = 4$ og $2 \cdot 0 \cdot 2/()0^2 + 2^2) = 0.$

(c) Vi kan parametrisere kurven C_2 ved å ta utgangspunkt i parmetriseringen av sirkelen i xy-planet med sentrum i origo og radius 2, med vinkelen θ som parameter, og legge til et $\vec{k}$-ledd som flytter kurven fra xy-planet til grafen til $z = 2xy/(x^2 + y^2)$, slik:

$$\vec{r}(\theta) = 2\cos\theta\,\vec{\imath} + 2\sin\theta\,\vec{\jmath} + \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\vec{k} = 2\cos\theta\,\vec{\imath} + 2\sin\theta\,\vec{\jmath} + 2\cos\theta\sin\theta\,\vec{k}\,,$$

som, med $\theta : 0 \to \pi/2$, beskriver nettopp den aktuelle kurven. Dette gir:

$$\int_{C_2} (2y\vec{\imath} + 3x\vec{\jmath}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}\,'(\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (4\sin\theta\,\vec{\imath} + 6\cos\theta\,\vec{\jmath}) \cdot (-2\sin\theta\,\vec{\imath} + 2\cos\theta\,\vec{\jmath} + \cdots\vec{k})\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-8\sin^2\theta + 12\cos^2\theta + 0)d\theta = \int_0^{\pi/2} (-8\sin^2\theta + 12(1 - \sin^2\theta))d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (12 - 20\sin^2\theta)d\theta = \int_0^{\pi/2} (12 - 10(1 - \cos 2\theta))d\theta = \int_0^{\pi/2} (2 + 10\cos 2\theta)d\theta =$$

$$= [2\theta + 5\sin 2\theta]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\pi}}\,.$$

Oppgave 5

Vektorfeltet $\vec{F}$ er gitt i $\mathbf{R}^3$ unntatt z-aksen ved:

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + \frac{x}{x^2 + y^2})\vec{\imath} + (x + \frac{y}{x^2 + y^2})\vec{\jmath}.$$

(a) $\operatorname{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y + \frac{x}{x^2+y^2} & x + \frac{y}{x^2+y^2} & 0 \end{bmatrix} = \cdots = \underline{\underline{\vec{0}}}\,,$

og $\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y + \frac{x}{x^2 + y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(x + \frac{y}{x^2 + y^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = \cdots = \underline{\underline{0}}\,.$

(b) Vi parametriserer C slik: $\vec{r}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$, $\theta : 0 \to 2\pi$, som gir:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}\,'(\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} ((\sin\theta + \frac{\cos\theta}{1})\vec{\imath} + (\cos\theta + \frac{\sin\theta}{1})\vec{\jmath}) \cdot (-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) d\theta = \cdots = \underline{\underline{0}}\ .$$

(c) Feltet $\vec{F}$ $\underline{\underline{\text{er konservativt i sitt definisjonsområde}}}$, fordi vi kan finne en potensialfunksjon $f(x,y,z)$ slik:

$f_x(x,y,z)$ skal være lik $y + \dfrac{x}{x^2+y^2}$, så $f(x,y,z)$ må kunne skrives slik:

$$f(x,y,z) = xy + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \xi(y,z)\ .$$

Dette betyr at $f_y(x,y,z)$ kan skrives slik: $x + \dfrac{y}{x^2+y^2} + \xi_y(y,z)$, som blir lik feltets andre komponent, $x + \dfrac{y}{x^2+y^2}$, hvis og bare hvis $\xi_y(y,z) = 0$, dvs. $\xi(y,z) = \eta(z)$, slik at

$$f(x,y,z) = xy + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \eta(z)\ .$$

Dette gir at $f_z(x,y,z) = \eta'(z)$, som skal være lik 0 (feltets tredje komponent), så hvis $\eta(z)$ er konstant også m.h.p. z: $\eta(z) = K$, da har vi en potensialfunksjon for $\vec{F}$:

$$f(x,y,z) = xy + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + K \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z) \text{ i hele def.området til } \vec{F}.$$

(d) Da feltet $\vec{F}$ ikke er definert på z-aksen, og de partielle deriverte av $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/4}$ går mot ∞ når (x,y) nærmer seg randa til enhetssirkelen, beregner vi først fluksen opp gjennom flaten $S_{a,b} : z = (1 - x^2 - y^2)^{1/4}$, $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, for deretter å la $a \to 0^+$ og $b \to 1^-$:

$$\iint_{S_{a,b}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{(S_{a,b})_{xy}} (-P \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - Q \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + R) dA =$$

$$= \iint_{(S_{a,b})_{xy}} (-(y + \frac{x}{x^2+y^2}) \cdot \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-3/4} \cdot (-2x) -$$

$$(x + \frac{y}{x^2+y^2}) \cdot \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-3/4} \cdot (-2y) + 0) dA =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{(S_{a,b})_{xy}} (1 - x^2 - y^2)^{-3/4} (2xy + 1) dA =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^b (1 - r^2)^{-3/4} (2r^2 \cos\theta \sin\theta + 1) r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \cdot \int_a^b \frac{r^3\, dr}{(1-r^2)^{3/4}} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_a^b (1 - r^2)^{-3/4} r\, dr =$$

$$= 0 + \pi \cdot \int_{1-a^2}^{1-b^2} u^{-3/4} \cdot (-\frac{1}{2}) du = -\frac{\pi}{2} [4u^{1/4}]_{1-a^2}^{1-b^2} =$$

$$= -2\pi((1-b^2)^{1/4} - (1-a^2)^{1/4}) ,$$

som opplagt $\to \underline{\underline{2\pi}}$ når $a \to 0^+$ og $b \to 1^-$.

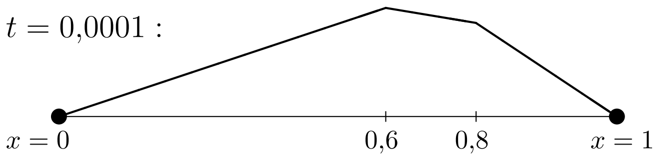
Oppgave 6

Iflg. d'Alembert's løsning er strengens form på ethvert tidspunkt $t \geq 0$ lik halve summen av to funksjoner av x og t — begge ved $t = 0$ lik den halvperiodiske utvidelsen $\tilde{f}(x)$ av startfunksjonen $f(x)$ for strengen ($f(x) = (2/700)x$ for $0 \leq x \leq 0{,}7$ og $f(x) = (2/300)(1-x)$ for $0{,}7 \leq x \leq 1$), og begge med konstant fart c, hhv. i positiv og negativ retning og uten endring av form:

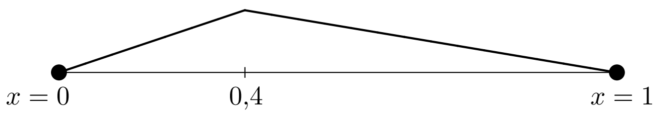
$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct)) .$$

Ved de tre angitte tidspunktene og med angitt verdi for c har $\frac{1}{2}\tilde{f}(x \pm ct)$ beveget seg 10 cm, 30 cm og 60 cm i hhv. negativ og positiv retning, og summen av dem vil se omtrent slik ut:

$t = 0{,}0001$:



$t = 0{,}0003$:



$t = 0{,}0006$: