HØGSKOLEN I GJØVIK

LØSNINGER, EKSAMEN I MATEMATIKK 3

27. MARS 2015 KL. 0900 – 1300

Oppgave 1

(a) $f_x(x,y,z) = 6yz - 3x^2$, $f_y(x,y,z) = 6xz - 3y^2$ og $f_z(x,y,z) = 6xy - 3z^2$, slik at $f_x(1,2,3) = 36 - 3 = 33$, $f_y(1,2,3) = 18 - 12 = 6$ og $f_z(1,2,3) = 12 - 27 = -15$, så de to enhetsnormalvektorene er:

$$\vec{n} = \pm\frac{\nabla f(1,2,3)}{|\nabla f(1,2,3)|} = \pm\frac{33\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 15\vec{k}}{|33\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 15\vec{k}|} = \pm\frac{11\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 5\vec{k}}{|11\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 5\vec{k}|} = \underline{\underline{\pm\frac{11\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 5\vec{k}}{5\sqrt{6}}}}\,.$$

(b) En likning for tangentplanet i P til nivåflaten til f gjennom P er

$$\underline{\underline{11(x-1) + 2(y-2) - 5(z-3) = 0}} \quad \text{eller:} \quad \underline{\underline{11x + 2y - 5z = 0}}\,.$$

(c) Den retningsderiverte til f i P i retningen rett mot origo er

$$D_{\vec{v}}f(1,2,3) = \nabla f(1,2,3)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (33\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 15\vec{k})\cdot\frac{-\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{-33 - 12 + 45}{\sqrt{14}} = \underline{\underline{0}}\,.$$

Oppgave 2

Ved hjelp av en figur som viser legemet T får vi:

(a) $$\iiint_T y\,dV = \underline{\underline{\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\int_0^{ky} y\,dz\,dy\,dx}}\,.$$

(b) $$\iiint_T y\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{kr\sin\theta} r\sin\theta\,dz\,r\,dr\,d\theta = \underline{\underline{\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{kr\sin\theta} r^2\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta}}\,.$$

(c) $$\iiint_T y\,dV = \int_0^{\pi}\int_{\tan^{-1}(1/k\sin\theta)}^{\pi/2}\int_0^{2\sin\theta/\sin\phi} \rho\sin\phi\sin\theta\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta =$$

$$= \underline{\underline{\int_0^{\pi}\int_{\tan^{-1}(1/k\sin\theta)}^{\pi/2}\int_0^{2\sin\theta/\sin\phi} \rho^3\sin^2\phi\sin\theta\,d\rho\,d\phi\,d\theta}}\,.$$

(Likningen til planet $z = ky$, omskrevet til kulekoordinater, er: $\rho\cos\phi = k\rho\sin\phi\sin\theta$ dvs.: $\tan\phi = 1/(k\sin\theta)$, og likningen til sylinderflaten $x^2 + (y-1)^2 = 1$, dvs. $x^2 + y^2 = 2y$, omskrevet til kulekoordinater, er: $\rho^2\sin^2\phi = 2\rho\sin\phi\sin\theta$, dvs. $\rho = 2\sin\theta/\sin\phi$.)

(d) Vi regner ut trippelintegralet i sylinderkoordinater:

$$\iiint_T y\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{kr\sin\theta} r^2\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\cdot kr\sin\theta\,dr\,d\theta = k\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cdot\int_0^{2\sin\theta} r^3\,dr\,d\theta =$$

$$= 4k\int_0^\pi \sin^6\theta\,d\theta = 4k\left[-\frac{1}{6}\sin^5\theta\cos\theta + \frac{5}{6}\int \sin^4\theta\,d\theta\right]_0^\pi =$$

$$= 4k\left[-\frac{1}{6}\sin^5\theta\cos\theta + \frac{5}{6}(-\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta + \frac{3}{4}\int \sin^2\theta\,d\theta)\right]_0^\pi =$$

$$= 4k\left[-\frac{1}{6}\sin^5\theta\cos\theta + \frac{5}{6}(-\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta))\right]_0^\pi =$$

$$= 4k\left[-\frac{1}{6}\sin^5\theta\cos\theta - \frac{5}{24}\sin^3\theta\cos\theta + \frac{5}{16}\theta - \frac{5}{32}\sin 2\theta\right]_0^\pi = 4k\cdot\frac{5\pi}{16} = \underline{\underline{\frac{5k\pi}{4}}}$$

Oppgave 3

(a) $\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & -z/(y^2+z^2) & y/(y^2+z^2) \end{vmatrix} = (\frac{-y^2+z^2}{(y^2+z^2)^2} + \frac{y^2-z^2}{(y^2+z^2)^2})\vec{\imath} = \underline{\underline{\vec{0}}}.$

(b) Med parametriseringen $C: \vec{r}(t) = \cos t\vec{\jmath} + \sin t\vec{k}$, $t: 0 \to 2\pi$ får vi:

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)dt = \int_0^{2\pi}(-\sin t\vec{\jmath} + \cos t\vec{k})\cdot(-\sin t\vec{\jmath} + \cos t\vec{k})dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{2\pi}}\,.$$

(c) $\vec{F}$ er <u>ikke</u> et konservativt felt, for det har et arbeidsintegral $\neq 0$ rundt den lukkede kurven C i (b).

(d) $\vec{F}$ <u>er</u> et konservativt felt på definisjonsområdet gitt ved $y > 0$, for dette er enkeltsammenhengende, og vi har sett i (a) at feltet er curl-fritt.

Oppgave 4

Vi bruker Divergensteoremet, med T lik det legemet som omsluttes av flaten S, den plane sirkelflaten S_2 i yz-planet med sentrum i $(0,0,0)$ og radius 2, og den plane sirkelflaten S_3 i planet $x = 2$ med sentrum i $(2,0,0)$ og radius 2. Normalvektoren $\vec{n}$ på S er utadrettet fra T, den utadrettede enhetsnormalvektoren på S_2 er $-\vec{\imath}$, og den utadrettede enhetsnormalvektoren på S_3 er $\vec{\imath}$, så Divergensteoremet gir:

$$\iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_1}\vec{F}\cdot(-\vec{\imath})\,dS + \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{\imath}\,dS\ ,$$

slik at $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV - \iint_{S_1}\vec{F}\cdot(-\vec{\imath})\,dS - \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{\imath}\,dS =$

$$= 0 + \iint_{S_1} y^2z^2\,dS - \iint_{S_2} y^2z^2\,dS = \underline{\underline{0}}\,,$$

fordi $\nabla\cdot\vec{F} = 0$, og de to flateintegralene har begge verdien $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin^2\theta\,r\,dr\,d\theta$, så differensen er lik 0.

Oppgave 5

$u = XY$ innsatt i $u_{xx} + u_{yy} = 0$ gir $X''Y + XY'' = 0$, dvs. $X''/X = -Y''/Y$, som innebærer at X''/X og $-Y''/Y$ må være lik en felles konstant, c: $X''/X = c$ og $-Y''/Y = c$, dvs. $X'' - cX = 0$ og $Y'' + cY = 0$. Løsningene av disse avhenger av fortegnet til c, slik:

$c > 0$: Vi setter da $c = \alpha^2$, som gir:
$X'' - cX = 0 \;\Rightarrow\; X'' - \alpha^2 X = 0 \;\Rightarrow\; X = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$,
og $Y'' + cY = 0 \;\Rightarrow\; Y'' + \alpha^2 Y = 0 \;\Rightarrow\; Y = C\sin\alpha y + D\cos\alpha y$,
slik at $u(x,y) = X(x)Y(y) = \underline{\underline{(Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})(C\sin\alpha y + D\cos\alpha y)}}$.

$c < 0$: Vi setter da $c = -\alpha^2$, som gir:
$X'' - cX = 0 \;\Rightarrow\; X'' + \alpha^2 X = 0 \;\Rightarrow\; X = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$,
og $Y'' + cY = 0 \;\Rightarrow\; Y'' - \alpha^2 Y = 0 \;\Rightarrow\; Y = Ce^{\alpha y} + De^{-\alpha y}$,
slik at $u(x,y) = X(x)Y(y) = \underline{\underline{(A\sin\alpha x + B\cos\alpha x)(Ce^{\alpha y} + De^{-\alpha y})}}$.

$c = 0$: Vi setter da $c = 0$, som gir:
$X'' - 0 = 0 \;\Rightarrow\; X'' = 0 \;\Rightarrow\; X = Ax + B$,
og $Y'' + 0 = 0 \;\Rightarrow\; Y'' = 0 \;\Rightarrow\; Y = Cy + D$,
slik at $u(x,y) = X(x)Y(y) = \underline{\underline{(Ax + B)(Cy + D)}}$.