HØGSKOLEN I GJØVIK

LØSNINGER, EKSAMEN I MATEMATIKK 3, 17. DESEMBER 2014

Oppgave 1

(a) En likning for tangentplanet kan settes opp slik:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \ .$$

(b) Vi ser at S inneholder $P = (5, 4, 7)$ ved innsetting: Venstre side i likningen for S blir: $2 \cdot 5^3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 4^3 = 1960$, og høyre side blir: $40 \cdot 7^2 = 1960$, så påstanden er bekreftet.

Med $f(x, y, z) = 2x^3y + 3xy^3 - 40z^2$ blir $f_x(5, 4, 7) = 6 \cdot 5^2 \cdot 4 + 3 \cdot 4^3 = 792$, $f_y(5, 4, 7) = 2 \cdot 5^3 + 9 \cdot 5 \cdot 4^2 = 970$ og $f_z(5, 4, 7) = -80 \cdot 7 = -560$, så en likning for tangentplanet til S i P er:

$$\underline{\underline{792(x - 5) + 970(y - 4) - 560(z - 7) = 0}}$$

eller, forenklet: $\underline{\underline{396x + 485y - 280z = 1960}}$.

Oppgave 2

(a) Kurven $y = x^2$ skjærer sirkelen $x^2 + y^2 = 2$ i de to punktene $(\pm 1, 1)$, så C består av de to delene $C_1 : y = x^2, \ -1 \leq x \leq 1$, som vi parametriserer med x, fra venstre mot høyre, slik: $\vec{r}_1(x) = x\,\vec{\imath} + x^2\vec{\jmath}, \ x : -1 \to 1$, og C_2, som er den delen av sirkelen $x^2 + y^2 = 2$ som har $y \geq 1$, og denne parametriserer vi med vinkelen θ, fra $(1, 1)$ til $(-1, 1)$, slik: $\vec{r}_2(\theta) = \sqrt{2}\cos\theta\,\vec{\imath} + \sqrt{2}\sin\theta\,\vec{\imath}, \ \theta : \pi/4 \to 3\pi/4$. Dermed får vi:

$$\oint_C (x^2\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} (x^2\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} (x^2\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2\vec{\imath} + x \cdot x^2\,\vec{\jmath}) \cdot \vec{r}_1{}'(x)dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2\cos^2\theta\,\vec{\imath} + 2\cos\theta\sin\theta\,\vec{\jmath}) \cdot \vec{r}_2{}'(\theta)d\theta =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2\vec{\imath} + x^3\,\vec{\jmath}) \cdot (\vec{\imath} + 2x\,\vec{\jmath})dx +$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2\cos^2\theta\,\vec{\imath} + 2\cos\theta\sin\theta\,\vec{\jmath}) \cdot (-\sqrt{2}\sin\theta\,\vec{\imath} + \sqrt{2}\cos\theta\,\vec{\imath})d\theta =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x^4)dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (-2\sqrt{2}\,\cos^2\theta\sin\theta + 2\sqrt{2}\,\cos^2\theta\sin\theta)d\theta =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5\right]_{-1}^{1} + 0 = 2(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}) = \underline{\underline{\frac{22}{15}}} \ .$$

(b) $$\oint_C (x^2\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}) \cdot d\vec{r} = \iint_R (\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y})dA = \iint_R y\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} ((2 - x^2) - (x^2)^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2 - x^2 - x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left[2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}) = \underline{\underline{\frac{22}{15}}}\,.$$

Oppgave 3

(a) Volumet av T er terningvolumet (8) minus volumet av den delen av terningen som ligger *over* planet gitt ved $x + y + z = 5$. Dette planet går gjennom $(2,2,1)$ (som er midtpunktet på terningkanten mellom hjørnene $(2,2,0)$ og $(2,2,2)$), $(2,1,2)$ (som er midtpunktet på terningkanten mellom hjørnene $(2,0,2)$ og $(2,2,2)$) og $(1,2,2)$ (som er midtpunktet på terningkanten mellom hjørnene $(0,2,2)$ og $(2,2,2)$). Den biten som kuttes av terningen er dermed tetraederet der tre av sideflatene er rettvinklede trekanter der begge kateter har lengde 1, og dette har volum lik $1/6$ ($\frac{1}{3}$ ganger grunnflaten ganger høyden), så volumet av T er:

$$V_T = 8 - \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{47}{6}}}\,.$$

(b) Vi tar sikte på en oppstilling med et z-integral på første (innerste) nivå, og da må T_{xy} (xy-projeksjonen av T) deles i to: T_{xy1}, der toppflaten er en del av planet $z = 2$, og T_{xy2}, der toppflaten er en del av planet $x + y + z = 5$ (T_{xy2} er da trekanten i xy-planet med hjørner $(1,2)$, $(2,1$ og $(2,2)$):

$$\iiint_T z\,dV = \iint_{T_{xy1}}\int_0^2 z\,dz\,dA + \iint_{T_{xy2}}\int_0^{5-x-y} z\,dz\,dA =$$

$$= \int_0^2\int_0^{g(x)}\int_0^2 z\,dz\,dy\,dx + \iint_{T_{xy2}}\int_0^{5-x-y} z\,dz\,dA =$$

$$= \underline{\underline{\int_0^1\int_0^2\int_0^2 z\,dz\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{3-x}\int_0^2 z\,dz\,dy\,dx + \int_1^2\int_{3-x}^2\int_0^{5-x-y} z\,dz\,dy\,dx}} =$$

$$= \int_0^1\int_0^2 2\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{3-x} 2\,dy\,dx + \int_1^2\int_{3-x}^2 \frac{1}{2}(5-x-y)^2\,dy\,dx =$$

$$= 2\cdot 2\cdot 1 + 2\int_1^2(3-x)dx + \frac{1}{2}\int_1^2\left[\frac{1}{3}(5-x-y)^3(-1)\right]_{3-x}^2 dx =$$

$$= 4 + 2\left[3x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - \frac{1}{6}\int_1^2((3-x)^3 - 2^3)dx =$$

$$= 4 + 2((6-2) - (3 - \frac{1}{2})) - \frac{1}{6}\int_1^2(3-x)^3dx + \frac{1}{6}\int_1^2 2^3dx =$$

$$= 4 + 8 - 5 - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}(3-x)^4\cdot(-1)\right]_1^2 + \frac{8}{6}\int_1^2 dx =$$

$$= 7 + \frac{1}{24}(1^4 - 2^4) + \frac{4}{3}\cdot 1 = 7 - \frac{15}{24} + \frac{4}{3} = \frac{7\cdot 24 - 15 + 4\cdot 8}{24} = \underline{\underline{\frac{185}{24}}}\,.$$

Oppgave 4

(a) $A_S = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\, dv = \iint_D \left| -2u^2 \cos v\, \vec{\imath} - 2u^2 \sin v\, \vec{\jmath} + u\, \vec{k} \right| du\, dv =$

$$= \iint_D \sqrt{4u^4 \cos^2 v + 4u^4 \sin^2 v + u^2}\, du\, dv = \iint_D \sqrt{4u^4(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2}\, du\, dv =$$

$$= \iint_D \sqrt{4u^4 + u^2}\, du\, dv = \underline{\underline{\int_0^{\pi} \int_0^2 \sqrt{4u^4 + u^2}\, du\, dv}}$$

(b) $A_S = \int_0^{\pi} \int_0^2 \sqrt{4u^4 + u^2}\, du\, dv = \int_0^{\pi} dv \cdot \int_0^2 \sqrt{4u^4 + u^2}\, du =$

$$= \pi \int_0^2 u\sqrt{4u^2 + 1}\, du = \pi \cdot \frac{1}{8} \int_1^{17} w^{1/2} dw = \pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \left[w^{3/2} \right]_1^{17} = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}(17^{3/2} - 1)}}\ .$$

(Med substitusjonen $w = 4u^2 + 1$.)

Oppgave 5

(a) $\mathbf{R}^3$ er enkeltsammenhengende, så feltet er konservativt hvis og bare hvis det er curl-fritt:

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = (cx - bx)\, \vec{\imath} - (cy - ay)\, \vec{\jmath} + (bz - az)\, \vec{k} = (c-b)x\, \vec{\imath} - (c-a)y\, \vec{\jmath} + (b-a)z\, \vec{k}$$

Vi ser at dette er konstant 0 hvis og bare hvis $\underline{\underline{a = b = c}}$, så feltet er konservativt for alle slike verdier av a, b og c.

(b) Vi parametriserer C slik: $\vec{r}(t) = 2\cos t\, \vec{\imath} + 2\sin t\, \vec{\jmath} + \vec{k},\ \ t\colon\ 0 \to 2\pi$, som gir:

$$\int_C (2yz\, \vec{\imath} + 3xz\, \vec{\jmath} + 4xy\, \vec{k}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (2 \cdot 2\sin t \cdot 1\, \vec{\imath} + 3 \cdot 2\cos t \cdot 1\, \vec{\jmath} + 4 \cdot 2\cos t \cdot 2\sin t\, \vec{k}) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\sin t\, \vec{\imath} + 6\cos t\, \vec{\jmath} + 16\cos t \sin t\, \vec{k}) \cdot (-2\sin t\, \vec{\imath} + 2\cos t\, \vec{\jmath})\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-8\sin^2 t + 12\cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-4(1 - \cos 2t) + 6(1 + \cos 2t))\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 + 10\cos 2t)\, dt = [2t + 5\sin 2t]_0^{2\pi} = \underline{\underline{4\pi}}\ .$$

(c) Sirkelen beskrevet i (b) er randa til den plane flaten S den avgrenser i planet $z = 1$, og orienteringen angitt i (b) er positiv m.h.t. oppoverrettet orientering av S, dvs. $\vec{n} = \vec{k}$. Stokes' teorem gir da at

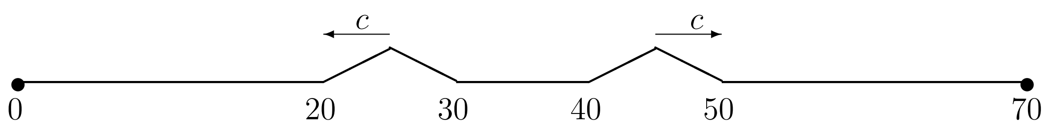
$$\int_C (2yz\, \vec{\imath} + 3xz\, \vec{\jmath} + 4xy\, \vec{k}) \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times (2yz\, \vec{\imath} + 3xz\, \vec{\jmath} + 4xy\, \vec{k}) \cdot \vec{n}\, dS =$$

$$= \iint_S ((4-3)x\, \vec{\imath} - (4-2)y\, \vec{\jmath} + (3-2)z\, \vec{k}) \cdot \vec{k}\, dS = \iint_S z\, dS = \iint_S 1\, dS = A_S = \pi \cdot 2^2 = \underline{\underline{4\pi}}\ .$$

Oppgave 6

Strengen vil oppføre seg som om "trekanten" på midten er summen av to like brede og halvparten så høye trekanter, som ved $t = 0$ starter å vandre ut mot hver sin ende av strengen, begge med konstant fart lik c. Helt i begynnelsen er de to i kontakt med hverandre (fram til $t = 0{,}0001$ s), og summen (strengen) har da form av et trapes, med toppsiden parallell med resten av strengen og sidekantene med stigningstall som er halve stigningstallene til sidekantene i den opprinnelige trekanten. Ved tiden $t = 0{,}0007$ s kommer de to delene i kontakt med festepunktene i endene (samtidig, siden de startet akkurat på midten), og da blir de gradvis tvunget ned, og det danner seg tilsvarende "trekantbølger" på undersiden av x-aksen, og disse beveger seg, fortsatt med fart lik c, tilbake igjen fra de to endene. Disse vil "gå gjennom" hverandre på midten (fra $t = 0{,}0013$ s til $t = 0{,}0015$ s), og i ett tidspunkt ($t = 0{,}0014$ s) smelter de sammen til en trekantform på undersiden som er lik den opprinnelige trekantformen, før de fortsetter hver sin ferd fram og tilbake med omvendinger i endepunktene.

Ved $t = 0{,}0002$ s ser strengen slik ut:



og ved $t = 0{,}001$ s ser den slik ut: