HØGSKOLEN I GJØVIK

LØSNINGER, EKSAMEN I MATEMATIKK 3 (REA3011)

24. MARS 2014 KL. 1300 – 1700

Oppgave 1

Funksjonen f er definert i hele $\mathbf{R}^3$ ved: $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{2+\sin(\pi xy^2z^3)}$, og P er punktet $(1,1,1)$.

(a) $f_x(x,y,z) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\cos(\pi xy^2z^3)\cdot \pi y^2z^3}{2\sqrt{2+\sin(\pi xy^2z^3)}} \Rightarrow f_x(1,1,1) = \dfrac{\sqrt{2}\cos\pi}{2\sqrt{2+\sin\pi}} = -\dfrac{1}{2}$,

$f_y(x,y,z) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\cos(\pi xy^2z^3)\cdot 2\pi xyz^3}{2\sqrt{2+\sin(\pi xy^2z^3)}} \Rightarrow f_y(1,1,1) = \dfrac{2\sqrt{2}\cos\pi}{2\sqrt{2+\sin\pi}} = -1$

og $f_z(x,y,z) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\cos(\pi xy^2z^3)\cdot 3\pi xy^2z^2}{2\sqrt{2+\sin(\pi xy^2z^3)}} \Rightarrow f_z(1,1,1) = \dfrac{3\sqrt{2}\cos\pi}{2\sqrt{2+\sin\pi}} = -\dfrac{3}{2}$,

slik at $\nabla f(P) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \frac{3}{2}\vec{k}}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k})}}$.

$$D_{\vec{v}}f(P) = \nabla f(P)\cdot\vec{v}/|\vec{v}| = -\frac{1}{2}(\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k})\cdot(\vec{\jmath}+2\vec{k})/\sqrt{5} =$$

$$-\frac{1}{2}(0+2+6)/\sqrt{5} = \underline{\underline{-\frac{4}{\sqrt{5}}}} = \underline{\underline{-\frac{4}{5}\sqrt{5}}}\,.$$

(b) En likning for tangentplanet i P til nivåflaten til f gjennom P er:

$$\underline{\underline{-\frac{1}{2}(x-1)-(y-1)-\frac{3}{2}(z-1)=0}} \quad \text{eller:} \quad \underline{\underline{x+2y+3z=6}}\,.$$

Oppgave 2

En likning for sirkelen er: $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, dvs.: $x^2+y^2=2(x+y)$, som i polarkoordinater gir: $r^2 = 2(r\cos\theta + r\sin\theta)$, dvs.: $r = 2(\cos\theta+\sin\theta)$. Løsing m.h.p. y gir: $y = 1\pm\sqrt{2-(x-1)^2}$ (for $1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}$).

(a) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dA = \underline{\underline{\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\int_{1-\sqrt{2-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}}(x^2+y^2)\,dy\,dx}}$

(b) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dA = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r^2\cdot r\,dr\,d\theta = \underline{\underline{\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)} r^3\,dr\,d\theta}}$

Oppgave 3

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{y}{x^2+y^2-1}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{x}{x^2+y^2-1}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}-\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}=0,$

så feltet er "curl-fritt" i D. Området D er ikke enkeltsammenhengende, så vi prøver å finne en potensialfunksjon f for feltet:

$$f_x(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2-1}\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2-1)+\xi(y)\Rightarrow$$

$$f_y(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2-1}+\xi'(y),\text{ som er lik }\frac{y}{x^2+y^2-1}\text{ hvis og bare hvis }\xi'(y)=0,$$

dvs. $\xi(y)=C$ (konstant m.h.p. y). Konklusjon: Feltet $\vec{F}$ <u>er konservativt i D</u>, da det har en potensialfunksjon i D.

(b) Vektorfeltet $\vec{G}$ er også "curl-fritt" i D, men det er <u>ikke konservativt i D</u>, da det ikke har "veiuavhengighetsegenskapen" i D. F.eks. vil arbeidsintegralet rundt sirkelen $C:\vec{r}=\cos\theta\vec{\imath}+\sin\theta\vec{\jmath}$, med $\theta:0\to 2\pi$, ikke gi 0 som resultat:

$$\int_C \vec{G}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(-\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,d\theta=-\int_0^{2\pi}d\theta=-2\pi\ .$$

Oppgave 4

(a) $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{\jmath}\,dS=\iint_S x^2\,dS=\iint_S x^2\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr\,d\theta=$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\cdot\int_0^1 r^3dr=\pi\cdot\frac{1}{4}=\underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

(b) Vi bruker parametriseringen $C:\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\sin t\,\vec{k}$, med $t:0\to 2\pi$:

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds=\int_0^{2\pi}\vec{F}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t\,\vec{\jmath}+2\sin t\,\vec{k})\cdot(-\sin t\,\vec{\imath}+\cos t\,\vec{k})dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}2\cos t\sin t\ dt=\Big[\sin^2 t\Big]_0^{2\pi}=\underline{\underline{0}}$$

Oppgave 5

$u(x,t)=20\sin\pi x\,e^{Kt}\Rightarrow u_t(x,t)=20K\sin\pi x\,e^{Kt}$ og $u_x(x,t)=20\pi\cos\pi x\,e^{Kt}$ og $u_{xx}(x,t)=-20\pi^2\sin\pi x\,e^{Kt}$, så K må være slik at $20K\sin\pi x\,e^{Kt}=\alpha^2\cdot(-20)\pi^2\sin\pi x\,e^{Kt}$. Vi ser at dette oppnås med $K=-\pi^2\alpha^2$, så den aktuelle løsningen er: $u(x,t)=20\sin\pi x\,e^{-\pi^2\alpha^2 t}$.

I midtpunktet i veggen gir dette temperaturfunskjonen $u(0.5,t)=20e^{-\pi^2\alpha^2 t}$.

Vi ser da at midtpunktstemperaturen er nede på 10 grader når $20e^{-\pi^2\alpha^2 t}=10$, dvs. $e^{-\pi^2\alpha^2 t}=\frac{1}{2}$, dvs. $-\pi^2\alpha^2 t=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$, dvs.:

$$t=\frac{\ln 2}{\pi^2\alpha^2}=\frac{\ln 2}{\pi^2\alpha^2}=\frac{0.69315}{9.8696\cdot 0,6\cdot 10^{-6}}=\underline{\underline{117051\ s}}\approx\underline{\underline{32\text{ timer}, 30\text{ min.}, 51\text{ sek.}}}$$