HØGSKOLEN I GJØVIK

LØSNINGER, EKSAMEN I MATEMATIKK 30
22. MARS 2013

Oppgave 1

(a) $f(3,2,1) = 3^3 + 2\cdot 2^3 + 3\cdot 1^3 - 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 22$, så nivåflaten til f gjennom P er gitt ved likningen:

$$\underline{\underline{x^3 + 2y^3 + 3z^3 - 4xyz = 22}}\,.$$

(b) $f_x(P) = 3\cdot 3^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 19$, $f_y(P) = 2\cdot 3\cdot 2^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = 12$ og $f_z(P) = 3\cdot 3\cdot 1^2 - 4\cdot 3\cdot 2 = -15$, så tangentplanet i P til nivåflaten til f gjennom P er gitt ved likningen:

$$\underline{\underline{19(x-3) + 12(y-2) - 15(z-1) = 0}} \quad \text{eller:} \quad \underline{\underline{19x + 12y - 15z = 66}}\,.$$

(c) $\Delta f = f(3.1,\ 1.9,\ 1.1) - f(3,2,1) \approx \nabla f(P)\cdot \Delta\vec{r} =$

$$= (19\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} - 15\vec{k})\cdot(0.1\,\vec{\imath} - 0.1\,\vec{\jmath} + 0.1\,\vec{k}) = 1.9 - 1.2 - 1.5 = \underline{\underline{-0.8}}\,.$$

Oppgave 2

(a) $\displaystyle\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dV = \iint_{T_{xy}} \int_0^3 (x^2+y^2+z^2)dz\,dA =$

$$= \underline{\underline{\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^3 (x^2+y^2+z^2)dz\,dy\,dx}}\,.$$

(b) $\displaystyle\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dV = \underline{\underline{\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^3 (r^2+z^2)r\,dz\,dr\,d\theta}}\,.$

(c) I kulekoordinater må vi sette opp integralet som en sum av to deler: En for den delen, T_1, av T som ligger over kjegleflaten $\phi = \frac{\pi}{4}$ og mellom origo og planet $z = 3$ (dvs. $\rho\cos\phi = 3$, dvs. $\rho = 3/\cos\phi$), og en for den delen, T_2, av T som ligger under kjegleflaten og mellom origo og sylinderflaten $x^2 + y^2 = 9$ (dvs. $\rho^2\sin^2\phi = 9$, dvs. $\rho = 3/\sin\phi$):

$$\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dV = \iiint_{T_1} \rho^2\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta + \iiint_{T_2} \rho^2\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta =$$

$$= \underline{\underline{\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3/\cos\phi} \rho^4\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta + \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{3/\sin\phi} \rho^4\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta}}\,.$$

(d) Vi regner ut trippelintegralet i sylinderkoordinater:

$$\iiint_T (x^2+y^2+z^2)dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^3 (r^2+z^2)r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^3 \left[(r^2z + \frac{1}{3}z^3)r\right]_0^3 dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^3 (3r^2+9)r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^3 (3r^3+9r)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{3}{4}r^4+\frac{9}{2}r^2\right]_0^3 d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3\cdot 3^4}{4}+\frac{9\cdot 3^2}{2}\right) = \frac{81\pi}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{405\pi}{8}}}\ .$$

Oppgave 3

(a) $P = \dfrac{2xz}{(x^2+y^2-3)^2} \Rightarrow P_y = \dfrac{-8xyz}{(x^2+y^2-3)^3}$ og $P_z = \dfrac{2x}{(x^2+y^2-3)^2}$,

$Q = \dfrac{2yz}{(x^2+y^2-3)^2} \Rightarrow Q_x = \dfrac{-8xyz}{(x^2+y^2-3)^3}$ og $Q_z = \dfrac{2y}{(x^2+y^2-3)^2}$ og

$R = \dfrac{-1}{x^2+y^2-3} \Rightarrow R_x = \dfrac{2x}{(x^2+y^2-3)^2}$ og $R_y = \dfrac{2y}{(x^2+y^2-3)^2}$, slik at

$$\text{curl}(\vec{F}) = (R_y - Q_z)\,\vec{\imath} - (R_x - P_z)\,\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\,\vec{k} = \underline{\underline{\vec{0}}}$$

i hele definisjonsområdet D til feltet $\vec{F}$.

(b) $\displaystyle\oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underline{\underline{0}}$ fordi C_1 er en lukket kurve i området innenfor sylinderflaten $x^2+y^2=3$, og dette er et enkel-sammenhengende område der $\text{curl}(\vec{F}) = \vec{0}$, og da er $\vec{F}$ konservativt der.

(c) C_2 er en lukket kurve i området utenfor sylinderflaten $x^2+y^2=3$, og dette er ikke et enkel-sammenhengende område, så vi regner ut arbeidsintegralet direkte, ved å bruke denne parametriseringen av C_2:

$$C_2: \quad \vec{r}(t) = 2\cos\theta\,\vec{\imath} + 2\sin\theta\,\vec{\jmath}, \quad t: 0 \to 2\pi\ :$$

$$\oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(0\cdot(-2\sin\theta) + 0\cdot 2\cos\theta - \frac{1}{4-3}\cdot 0\right)dt = \underline{\underline{0}}\ .$$

Oppgave 4

$u(x,t) = X(x)T(t) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} X''T = XT'' \Rightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T''}{T} \Rightarrow \dfrac{X''}{X} = q = \dfrac{T''}{T} \Rightarrow$

$$X'' - qX = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Hvis } q=\kappa^2: & X(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} & \stackrel{(2),(3)}{\Rightarrow} X(x) = 0 \\ \text{Hvis } q=0: & X(x) = Ax + B & \stackrel{(2),(3)}{\Rightarrow} X(x) = 0 \\ \text{Hvis } q=-\kappa^2: & X(x) = A\sin\kappa x + B\cos\kappa x & \stackrel{(2)}{\Rightarrow} X(x) = A\sin\kappa x \end{cases}$$

og $X(x) = A\sin\kappa x \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \kappa = n\pi \Rightarrow X(x) = A\sin n\pi x$ og
$T'' = -\kappa^2 T = -n^2\pi^2 T \Rightarrow T(t) = C\sin n\pi t + D\cos n\pi t \stackrel{(4)}{\Rightarrow} T(t) = D\cos n\pi t \Rightarrow$
$u(x,t) = X(x)T(t) = E\sin n\pi x\cos n\pi t$, og vi ser at én av disse løsningene også oppfyller krav (5), nemlig denne:

$$\underline{\underline{u(x,t) = \frac{1}{1000}\sin 2\pi x\cos 2\pi t}}\ .$$