HØGSKOLEN I GJØVIK

LØSNINGER, EKSAMEN I MATEMATIKK 30 21. DESEMBER 2012

Oppgave 1

(a) Gradienten til f i P, $\nabla f(P) = f_x(P)\vec{\imath} + f_y(P)\vec{\jmath} + f_z(P)\vec{k}$, er en normalvektor til tangentplanet, som dermed har likningen

$$\underline{\underline{f_x(P)(x-x_0) + f_y(P)(y-y_0) + f_z(P)(z-z_0) = 0}}\,.$$

(b) Her er $f_x(x,y,z) = 2z$, $f_y(x,y,z) = -6y$ og $f_z(x,y,z) = 2x$, slik at $f_x(P) = 2\cdot 3 = 6$, $f_y(P) = -6\cdot 1 = -6$ og $f_z(P) = 2\cdot 2 = 4$, og dermed er tangentplanet gitt ved likningen

$$\underline{\underline{6(x-2) - 6(y-1) + 4(z-3) = 0}}\,, \qquad \text{eller:} \quad \underline{\underline{3x - 3y + 2z = 9}}\,.$$

Oppgave 2

(a) Med x og y som parametere får vi:

$$m = \iint_S 10\,dS = 10\iint_{S_{xy}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,dA = 10\iint_{S_{xy}} \sqrt{x^2+y^2+1}\,dA =$$

$$= 10\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\,r\,dr\,d\theta = 10\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = 10\pi\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{20\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)}}$$

og:

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\iint_S 10z\,dS = \frac{10}{m}\iint_{S_{xy}} z\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dA = \frac{10}{m}\iint_{S_{xy}} \frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}\,dA =$$

$$= \frac{10}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}r^2\sqrt{r^2+1}\,r\,dr\,d\theta = \frac{5}{m}\cdot 2\pi\cdot\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\,r^3\,dr =$$

$$= \frac{10\pi}{m}\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}(u-1)\,du = \frac{5\pi}{m}\cdot\int_1^2 (u^{3/2} - u^{1/2})\,du = \frac{5\pi}{m}\left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{10\pi}{m}\left(\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{10\pi}{m}\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2}{15} + \frac{2}{15}\right) = \frac{4\pi}{3m}(\sqrt{2}+1) =$$

$$= \frac{4\pi}{3\cdot\frac{20\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}+1}{5(2\sqrt{2}-1)}}} = \underline{\underline{\frac{3}{35}(3+\sqrt{2}\,)}} \approx 0{,}3784$$

(b) Massen til parabolflaten med vann er lik summen av m, funnet i (a), og massen av vannet, som — ettersom tettheten er lik 1000 — er

$$1000V = 1000\iint_{S_{xy}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)dA = 500\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= 500\cdot 2\pi\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = 250\pi\,,$$

slik at den samlede massen er:

$$\frac{20\pi}{3}(2\sqrt{2}-1) + 250\pi = \underline{\underline{\frac{10\pi}{3}(4\sqrt{2}+73)}} \approx 823{,}69\,.$$

Oppgave 3

Torusen er legemet mellom de to funksjonsgrafene $z = \pm\sqrt{b^2 - (r-a)^2}$, begge definert på det ringformede området som i polarkoordinater beskrives slik: $a - b \le r \le a + b$, $0 \le \theta \le 2\pi$, så volumet er:

$$V_T = \iiint_T dV = \int_0^{2\pi} \int_{a-b}^{a+b} \int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} dz\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot \int_{a-b}^{a+b} 2\sqrt{b^2 - (r-a)^2}\, r\, dr = 4\pi \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 - u^2}\,(u + a)\, du =$$

$$= 4\pi \left(\int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 - u^2}\, u\, du + a \int_{-b}^{b} \sqrt{b^2 - u^2}\, du \right) = 4\pi(0 + a \cdot \frac{\pi b^2}{2}) = \underline{\underline{2\pi^2 a b^2}}\ .$$

Oppgave 4

Vektorfeltet $\vec{F}$ er definert i hele $\mathbf{R}^3$ ved: $\quad \vec{F}(x, y, z) = 2x\,\vec{\imath} + 6y\,\vec{\jmath} - 8z\,\vec{k}$.

(a) $\nabla \times \vec{F} = (0-0)\,\vec{\imath} - (0-0)\,\vec{\jmath} + (0-0)\,\vec{k} = \vec{0}$ i hele $\mathbf{R}^3$. Siden $\mathbf{R}^3$ er enkelt-sammenhengende følger det at $\vec{F}$ er $\underline{\underline{\text{konservativt i } \mathbf{R}^3}}$.

(b) C kan parametriseres slik:

$$\vec{r}(t) = (1 + (0-1)t)\,\vec{\imath} + (2 + (1-2)t)\,\vec{\jmath} + (0 + (2-0)t)\,\vec{k} = (1-t)\,\vec{\imath} + (2-t)\,\vec{\jmath} + 2t\,\vec{k} \quad t : 0 \to 1$$

som gir $\vec{r}\,'(t) = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, og dermed:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) dt = \int_0^1 (2(1-t)\,\vec{\imath} + 6(2-t)\,\vec{\jmath} - 16t\,\vec{k}) \cdot (-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}) dt =$$

$$= \int_0^1 (-2(1-t) - 6(2-t) + 2(-16t)) dt = \int_0^1 (-24t - 14) dt = \Big[-12t^2 - 14t\Big]_0^1 = \underline{\underline{-26}}\ .$$

(c) Planet $x = 1$ skjærer kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ i en sirkel med radius $\sqrt{2}$, fordi $1^2 + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 + z^2 = 2$, slik at S_1 kan beskrives slik: $x = x(y, z) = 1$ og $y^2 + z^2 \le 2$, og den kan dermed parametriseres med y og z som parametere, og med sirkelen i yz-planet $y^2 + z^2 \le 2$ som parameterområde, slik:

$$\vec{r}(y, z) = \vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\ , \quad (y, z) \in D : y^2 + z^2 \le 2\ .$$

Dette gir $\vec{r}_y \times \vec{r}_z = \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$, som stemmer med den angitte orienteringen $\vec{n}$ av S_1. Dermed har vi:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(y, z)) \cdot \vec{r}_y \times \vec{r}_z\, dA = \iint_D (2\vec{\imath} + 6y\,\vec{\jmath} - 8z\,\vec{k}) \cdot \vec{\imath}\, dA =$$

$$= \iint_D 2\, dA = 2 \cdot A_D = 2 \cdot \pi(\sqrt{2}\,)^2 = \underline{\underline{4\pi}}\ .$$

(d) Flaten S_2, sammen med flaten S_1 i pkt. (c), utgjør overflaten til et legeme T. Ifølge Divergensteoremet er dermed summen av *utgående* fluks for $\vec{F}$ gjennom de to flatene lik $\iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iiint_T (2+6-8)\, dV = 0$. Den angitte orienteringen av S_2 *er* utgående fra T, mens orienteringen av S_1 angitt i (c) er *inngående*. Dermed har vi:

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV - (-\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS) = 0 + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \underline{\underline{4\pi}} \, .$$

Oppgave 5

Separasjon av variable går ut på at vi først finner de ikketrivielle produktløsningene $u(x,t) = X(x)T(t)$ som oppfyller kravene (1) $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, (2) $u(0,t) = 0$ og (3) $u(1,t) = 0$ i hele området $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$.

Med $u(x,t) = X(x)T(t)$ blir (1) slik: $X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$, dvs.: $\dfrac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$, som innebærer at de to brøkuttrykkene må være lik en felles konstant, q: $\dfrac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = q = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$, dvs.: (4) $X''(x) - qX(x) = 0$ og (5) $T'(t) = \alpha^2 q T(t)$.

(4) har ulike typer løsninger, avhengig av fortegnet til q, slik:

Med $q > 0$ får vi $X(x) = Ae^{\sqrt{q}\,x} + Be^{-\sqrt{q}\,x}$, og med (2) og (3) er det da ingen annen mulighet enn at $A = B = 0$, som leder rett til den trivielle løsningen.

Med $q = 0$ får vi $X(x) = Ax + B$, og her vil også (2) og (3) innebære at $A = B = 0$, som igjen er uten interesse.

Med $q < 0$ setter vi $q = -\kappa^2$, slik at løsningene av (4) kan skrives: $X(x) = A\sin\kappa x + B\cos\kappa x$. (2) vil da gi at $X(0) = B = 0$, slik at $X(x) = A\sin\kappa x$, og (3) gir videre at $X(1) = A\sin\kappa = 0$, dvs. at κ må kunne skrives slik: $\kappa = n\pi$, der n er heltallig. Altså må vi ha $X(x) = A\sin n\pi x$.

Vi setter så $q = -\kappa^2 = -n^2\pi^2$ inn i (5): $T'(t) = -\alpha^2 n^2 \pi^2 T(t)$, som har løsningene $T(t) = Ce^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}$, som sammen med $X(x) = A\sin\kappa n\pi$ gir:

$$u(x,t) = T(t)X(x) = Ke^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \quad (\text{med } K = AC \text{ og } n = 1, 2, 3, 4, \ldots) \, .$$

Dette er alle produktløsninger som oppfyller (1), (2) og (3). Lineære kombinasjoner av disse, og konvergente rekker der hvert ledd er en slik produktløsning, vil også oppfylle (1), (2) og (3). Oppgaven setter enda et krav, nemlig det at $u(x,0)$ skal være lik $20\sin\pi x$ for $0 \leq x \leq 1$. Med $t = 0$ i de produktløsningene vi har funnet får vi: $u(x,0) = T(0)X(x) = K\sin n\pi x$. Vi ser her at $K = 20$ og $n = 1$ gir oss nettopp den ønskede startfunksjonen, slik at den etterspurte løsningen er:

$$u(x,t) = \underline{\underline{20e^{-\alpha^2\pi^2 t}\sin\pi x}} = \underline{\underline{20e^{-0{,}5\cdot 10^{-6}\pi^2 t}\sin\pi x}} \, .$$

Med $x = 1/2$ får vi: $u(\frac{1}{2}, t) = 20e^{-\alpha^2\pi^2 t}\sin\frac{\pi}{2} = 20e^{-\alpha^2\pi^2 t}$, som er lik 10 når $e^{-\alpha^2\pi^2 t} = \frac{1}{2}$, dvs.: $-\alpha^2\pi^2 t = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, dvs. $t = \frac{\ln 2}{\alpha^2\pi^2} = \frac{\ln 2}{0{,}5\cdot 10^{-6}\pi^2} = \frac{2\ln 2}{\pi^2}\cdot 10^6 \approx \underline{\underline{140\,461}}$ [s], dvs. ca. 39 timer, 1 minutt og 1 sekund.