HØGSKOLEN I GJØVIK

LØSNINGSFORSLAG, EKSAMEN I MATEMATIKK 30 (REA3002)

5. DESEMBER 2011 KL. 0900 – 1300

Oppgave 1

(a) $T(P) = T(2,3,4) = 2 \cdot 2^2 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 32 + 48 - 54 = \underline{\underline{26}}$.
En likning for den "konstant-temperatur-flaten" som går gjennom P er:

$$\underline{\underline{2x^2z + yz^2 - 3xy^2 = 26}} \,.$$

(b) De partiellderivertes verdier i P er:
$T_x(P) = (4xz - 3y^2)_P = 4 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3^2 = 32 - 27 = 5$,
$T_y(P) = (z^2 - 6xy)_P = 4^2 - 6 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 36 = -20$, og
$T_z(P) = (2x^2 + 2yz)_P = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 8 + 24 = 32$,
så tangentplanets likning er:

$$\underline{\underline{5(x-2) - 20(y-3) + 32(z-4) = 0}} \qquad \text{eller:} \qquad \underline{\underline{5x - 20y + 32z = 78}} \,.$$

(c) En vektor som peker i retningen for raskest temperaturøkning for en som beveger seg gjennom punktet P er:

$$\nabla f(P) = \underline{\underline{5\vec{\imath} - 20\vec{\jmath} + 32\vec{k}}} \,.$$

Oppgave 2

(a) Hver plane del av overflaten inneholder tre av de fire hjørnene. De to plane delene som inneholder punktene $(0,0,0)$ og $(0,0,5)$ er vertikale (parallelle med z-aksen), så disse er "sidevegger". Planet gjennom $(0,0,0)$, $(4,0,1)$ og $(4,3,2)$ er undersiden av T, og det er en del av grafen til $z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y$. Planet gjennom $(0,0,5)$, $(4,0,1)$ og $(4,3,2)$ er oversiden av T, og det er en del av grafen til $z = 5 - x + \frac{1}{3}y$. Projeksjonen av T i xy-planet er trekanten med hjørner $(0,0)$, $(4,0)$ og $(4,3)$, og denne kan beskrives slik: $0 \le y \le \frac{3}{4}x$ for $0 \le x \le 4$. Dette gir:

$$m_T = \iiint_T \delta(x,y,z)\,dV = \underline{\underline{\iiint_T kx\,dV}} = \underline{\underline{\int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}x} \int_{\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y}^{5-x+\frac{1}{3}y} kx\,dz\,dy\,dx}} \,.$$

(b) $$m_T = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}x} \int_{\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y}^{5-x+\frac{1}{3}y} kx\,dz\,dy\,dx = \int_0^4 kx \int_0^{\frac{3}{4}x} \int_{\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y}^{5-x+\frac{1}{3}y} dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^4 kx \int_0^{\frac{3}{4}x} ((5 - x + \frac{1}{3}y) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y))\,dy\,dx = \int_0^4 kx \int_0^{\frac{3}{4}x} (5 - \frac{5}{4}x)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^4 kx \left[5y - \frac{5}{4}xy\right]_{y=0}^{y=\frac{3}{4}x} dx = \int_0^4 kx(\frac{15}{4}x - \frac{15}{16}x^2)\,dx =$$

$$= k\int_0^4 (\frac{15}{4}x^2 - \frac{15}{16}x^3)\,dx = k\left[\frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{64}x^4\right]_0^4 = k(80 - 60) = \underline{\underline{20k}} \,.$$

Oppgave 3

Vi parametriserer Colorados landområde med ϕ (= 90° − [breddegraden]) og θ (= lengdegraden i radianer), slik:

$$\vec{r}(\phi,\theta) = 6371\text{km} \cdot (\sin\phi\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\phi\sin\theta\,\vec{\jmath} + \cos\phi\,\vec{k})\ .$$

Dette gir $|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}| = (6371\text{km})^2 \sin\phi$, slik at

$$A_{\text{Colorado}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} (6371\text{km})^2 \sin\phi\, d\phi\, d\theta = 40\,589\,641\ \text{km}^2 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \cdot \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\phi\, d\phi =$$

$$= 40\,589\,641\ \text{km}^2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot (-\cos\phi_2 + \cos\phi_1) =$$

$$= 40\,589\,641\ \text{km}^2 \cdot (109°03' - 102°03') \cdot (-\cos(90° - 37°) + \cos(90° - 41°)) =$$

$$= 40\,589\,641\ \text{km}^2 \cdot 7 \cdot \frac{2\pi}{360} \cdot (\cos 49° - \cos 53°) = \underline{\underline{268\,994\ \text{km}^2}}$$

Oppgave 4

(a) $\vec{F}$ er $\underline{\underline{\text{ikke konservativt}}}$ i $\mathbf{R}^3$, fordi

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & x^2 & y \end{vmatrix} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2x\vec{k}$$

er ikke konstant lik 0 i $\mathbf{R}^3$.

(b) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}\,(\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{k}),\quad t : 0 \to 2\pi$ er en parametrisering av C som går gjennom kurvepunktet $(\sqrt{2}, 0, 0)$ for $t = 0$. Vi ser at $\vec{r}\,'(0) = \sqrt{2}\,\vec{k}$ peker i positiv z-retning, dvs. at $\vec{r}\,'(0) \cdot \vec{k} = \sqrt{2}\,\vec{k} \cdot \vec{k} = \sqrt{2}$ er > 0. Dermed er retningen til $\vec{r}(t)$ den motsatte av den angitte orienteringen av C, og vi bruker derfor i stedet $\vec{r}(t) = \sqrt{2}\,(\cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{k}),\quad t : 2\pi \to 0,$ som gir:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_{2\pi}^{0} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) dt =$$

$$= \int_{2\pi}^{0} (\sqrt{2}\,\sin t\,\vec{\imath} + 2\cos^2 t\,\vec{\jmath}) \cdot \sqrt{2}\,(-\sin t\,\vec{\imath} + \cos t\,\vec{k}) dt =$$

$$= -2\int_{2\pi}^{0} \sin^2 t\, dt = -2\int_{2\pi}^{0} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt = -\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{2\pi}^{0} = \underline{\underline{2\pi}}\ .$$

(c) Den angitte orienteringen av flaten S er identisk med den som gjør at positiv orientering av randa, C, er den samme som orienteringen av C beskrevet i (b). Stokes' teorem gir dermed:

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \underline{\underline{2\pi}}\ .$$

(d) Flaten S, sammen med den plane sirkelen D i xz-planet med sentrum i origo og radius $\sqrt{2}$, utgjør overflaten til et legeme, T, og den angitte orienteringen av S peker ut av legemet T. På D er den utadrettede enhetsnormalvektoren lik $-\vec{\jmath}$. Feltet $\vec{F}$ er divergensfritt:

$$\nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) = 0+0+0 = 0 \ ,$$

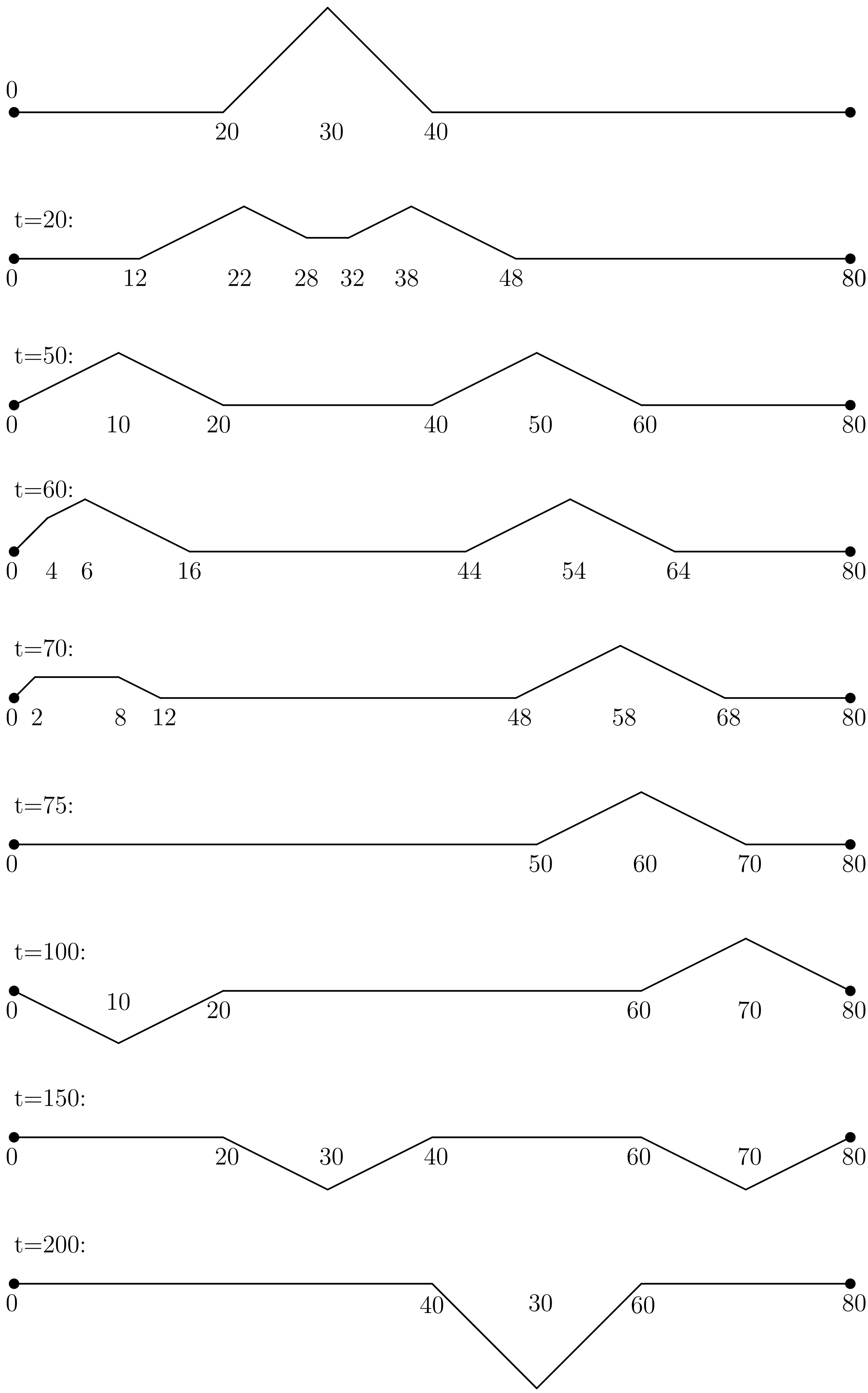
så ved Divergenssetningen har vi:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) dV - \iint_D \vec{F} \cdot (-\vec{\jmath})\, dS = 0 + \iint_D \vec{F} \cdot \vec{\jmath} dS = \iint_T x^2 dS =$$

$$= \iint_T x^2 dz dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cos^2\theta \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}(\sqrt{2}\,)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}$$

Oppgave 5

Iflg. d'Alemberts løsning vil strengens form til enhver tid være lik summen av to kopier av den odde halvperiodiske utvidelsen av $\frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}u(x,0)$ — én kopi som beveger seg fra startposisjonen mot høyre med fart $2/5 = 0{,}4$ og én kopi som beveger seg mot venstre med samme fart. Ved "grafisk addisjon" av disse to kopiene ved de angitte tidspunktene (og noen flere tidspunkter, for å gi et enda mer utfyllende bilde av strengens bevegelse) får vi disse "øyeblikksbildene" av strengen:


0
20 30 40
t=20:
0 12 22 28 32 38 48 80
t=50:
0 10 20 40 50 60 80
t=60:
0 4 6 16 44 54 64 80
t=70:
0 2 8 12 48 58 68 80
t=75:
0 50 60 70 80
t=100:
0 10 20 60 70 80
t=150:
0 20 30 40 60 70 80
t=200:
0 40 30 60 80