HØGSKOLEN I GJØVIK

LØSNINGER, EKSAMEN I MATEMATIKK 30 (REA3002), 24. MARS 2011

Oppgave 1

(a) Punktet $(2,3)$ ligger på C fordi dets koordinater passer i likningen for C:

$$2^4+3^4-9\cdot 2\cdot 3 = 16+81-54 = 43\ .$$

En vektor i $\mathbf{R}^2$ som står normalt på C i $(2,3)$ er $\nabla(x^4+y^4-9xy)_{(2,3)}$, fordi C er nivåkurven for funksjonen $f(x,y)=x^4+y^4-9xy$ gjennom $(2,3)$, så vi regner ut:

$$\nabla(x^4+y^4-9xy)_{(2,3)} = ((4x^3-9y)\vec{\imath}+(4y^3-9x)\vec{\jmath}\,)_{(2,3)} = (4\cdot 8-9\cdot 3)\vec{\imath}+(4\cdot 27-9\cdot 2)\vec{\jmath} = \underline{\underline{5\vec{\imath}+90\vec{\jmath}}}\,.$$

En likning for tangenten til C i $(2,3)$ kan dermed settes opp slik:

$$5(x-2)+90(y-3)=0 \quad \text{dvs.:}\quad \underline{\underline{(x-2)+18(y-3)=0}} \quad \text{dvs.:}\quad \underline{\underline{x+18y=56}}\ .$$

(b) Punktet $(2,3,4)$ ligger på S fordi dets koordinater passer i likningen for S:

$$2^4+3^4+4^4-14\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 16+81+256-336 = 17\ .$$

En vektor i $\mathbf{R}^3$ som står normalt på S i $(2,3,4)$ er $\nabla(x^4+y^4+z^4-14xyz)_{(2,3,4)}$, fordi S er nivåflaten for funksjonen $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-14xyz$ gjennom $(2,3,4)$, så vi regner ut:

$$\nabla(x^4+y^4+z^4-14xyz)_{(2,3,4)} = ((4x^3-14yz)\vec{\imath}+(4y^3-14xz)\vec{\jmath}+(4z^3-14xy)\vec{k}\,)_{(2,3,4)} =$$

$$= (4\cdot 8-14\cdot 3\cdot 4)\vec{\imath}+(4\cdot 27-14\cdot 2\cdot 4)\vec{\jmath}+(4\cdot 64-14\cdot 2\cdot 3)\vec{k} = \underline{\underline{-136\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+172\vec{k}}}\ .$$

En likning for tangentplanet til S i $(2,3,4)$ kan dermed settes opp slik:

$$-136(x-2)-4(y-3)+172(z-4)=0 \quad \text{dvs.:}\quad \underline{\underline{34(x-2)+(y-3)-43(z-4)=0}}\,,$$

$$\text{dvs.:}\quad \underline{\underline{34x+y-43z=-101}}\ .$$

(c) Den rette linja fra origo gjennom punktet $(2,3,4)$ har $\vec{v}=2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+4\vec{k}$ som retningsvektor, og vi finner den retningsderiverte til $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-14xyz$ i denne retningen i punktet $(2,3,4)$ slik:

$$D_{\vec{v}}f(2,3,4) = \frac{\nabla(x^4+y^4+z^4-14xyz)_{(2,3,4)}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-136\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+940\vec{k})\cdot(2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+4\vec{k})}{|\vec{v}|} =$$

$$= \frac{-272-12+3760}{|\vec{v}|} = \frac{3476}{|\vec{v}|}$$

som er >0. Det betyr at uttrykket er $\underline{\underline{\text{økende}}}$.

Oppgave 2

Sirkelens likning i kartesiske koordinater er: $x^2 + (y-3)^2 = 3^2$, dvs. $y = 3 \pm \sqrt{9-x^2}\,,\quad -3 \le x \le 3$ (eller $x = \pm\sqrt{6y-y^2}\,,\quad 0 \le y \le 6$), og i polar-koordinater: $r = 6\sin\theta\,,\;\; 0 \le \theta \le \pi$, slik at:

$$\iint_D y\,dA = \underline{\underline{\int_{-3}^{3}\int_{3-\sqrt{9-x^2}}^{3+\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx}} = \underline{\underline{\int_0^6 \int_{-\sqrt{6y-y^2}}^{\sqrt{6y-y^2}} y\,dx\,dy}} = \underline{\underline{\int_0^\pi \int_0^{6\sin\theta} r\sin\theta \cdot r\,dr\,d\theta}} =$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta \cdot \int_0^{6\sin\theta} r^2\,dr\,d\theta = \int_0^\pi \sin\theta \cdot \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{6\sin\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin\theta \cdot 6^3 \sin^3\theta\,d\theta = 72\int_0^\pi \sin^4\theta\,d\theta =$$

$$= 72 \cdot \left[-\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta + \frac{3}{4}\int \sin^2\theta\,d\theta\right]_0^\pi =$$

$$= 72 \cdot \left[-\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta)\right]_0^\pi =$$

$$= 72 \cdot ((0 + \frac{3}{4}(\frac{\pi}{2} - 0)) - 0) = 72 \cdot \frac{3\pi}{8} = \underline{\underline{27\pi}}$$

Oppgave 3

Kuleflatens likning i kartesiske koordinater er: $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 3^2$, dvs. $z = 3 \pm \sqrt{9-(x^2+y^2)}\,,\quad x^2 + y^2 \le 9$, og i kulekoordinater: $\rho = 6\cos\phi\,,\;\; 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$, slik at:

$$\iiint_T z^2\,dV = \underline{\underline{\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_{3-\sqrt{9-(x^2+y^2)}}^{3+\sqrt{9-(x^2+y^2)}} z^2\,dz\,dy\,dx}} =$$

$$= \underline{\underline{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{6\cos\phi} \rho^2\cos^2\phi \cdot \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\phi\sin\phi \int_0^{6\cos\phi} \rho^4 d\rho\,d\phi =$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\phi\sin\phi \cdot \frac{1}{5} \cdot 6^5\cos^5\phi\,d\phi = 2\pi \cdot \frac{6^5}{5}\int_0^{\pi/2} \cos^7\phi\sin\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{15552}{5}\pi \cdot \left[-\frac{1}{8}\cos^8\phi\right]_0^{\pi/2} = -\frac{15552}{40}\pi \cdot (0-1) = \frac{15552}{40}\pi = \underline{\underline{\frac{3888}{10}\pi}}\ .$$

Oppgave 4

(a) C er enhetssirkelen i xy-planet, og parametriseringen $\vec{r}(t) = \cos t\ \vec{\imath} + \sin t\ \vec{\jmath}$, $t:\ 0 \to 2\pi$ følger C i den angitte retningen, slik at

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \int_0^{2\pi}(0\cdot 0 + \cos t \cdot \cos t + 0 \cdot 0)dt = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi}}\ .$$

(b) C er randkurven til S_1, og orienteringen av C svarer til orienteringen av S_1 gitt ved $\vec{n} = \vec{k}$, så iflg. Stokes' teorem (og utregningen $\nabla \times \vec{F} = \vec{k}$) har vi:

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_{S_1} \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k}\, dS = \iint_{S_1} \vec{k} \cdot \vec{k}\, dS = \iint_{S_1} dS = A_{S_1} = \pi \ .$$

(c) C er også randkurven til S_2, orienteringen av C svarer til den oppoverrettede enhetsnormalvektoren på S_2, og $\vec{k} = \nabla \times \vec{F}$, så iflg. Stokes' teorem har vi:

$$\iint_{S_2} \vec{k} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_2} \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \underline{\underline{\pi}} \ .$$

Oppgave 5

(a) Vi finner først de løsningene på formen $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ som oppfyller randbetingelsene $u(0,t) = u(4,t) = 0$ for alle $t \geq 0$. Dette betyr at $X(0) = X(4) = 0$, og vi får:

$u_{xx} = u_{tt} \Rightarrow X''(x)T(t) = X(x)T''(T) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}$, og disse to brøkene må da være lik en felles konstant, q. Vi kan ikke ha $q > 0$, for da vil alle løsninger av $\frac{X''(x)}{X(x)} = q$ være av typen $Ae^{\sqrt{q}\,x} + Be^{-\sqrt{q}\,x}$, og den eneste slike som oppfyller kravet $X(0) = X(4) = 0$ er $X(x) = 0$, som innebærer at $u(x,t) = 0$ for alle t, og da kan ikke initialbetingelsen (strengens form ved $t = 0$) oppfylles. Vi kan heller ikke ha $q = 0$, for alle løsninger av $\frac{X''(x)}{X(x)} = 0$ er av typen $Ax + B$, og den eneste slike som oppfyller kravet $X(0) = X(4) = 0$ er $X(x) = 0$, som fortsatt innebærer at $u(x,t) = 0$ for alle t. Altså må vi ha $q < 0$, så vi setter $q = -\kappa^2$. Likningen $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\kappa^2$ (dvs. $X''(x) + \kappa^2 X(x) = 0$) har slike løsninger: $X(x) = A\cos\kappa x + B\sin\kappa x$. Kravet $X(0) = 0$ gir da at $A = 0$, slik at $X(x) = B\sin\kappa x$, og kravet $X(4) = 0$ gir videre at $\sin 4\kappa = 0$, dvs. at 4κ må være av typen $n\pi$ (med heltallig n), og da følger det at $\kappa = \frac{n\pi}{4}$. Altså har vi at $X(x) = B\sin\frac{n\pi}{4}x$, og vi går videre med likningen $\frac{T''(t)}{T(t)} = -(\frac{n\pi}{4})^2$, dvs. $T''(t) + (\frac{n\pi}{4})^2 T(t) = 0$. Denne har løsningene $T(t) = C\cos\frac{n\pi}{4}t + D\sin\frac{n\pi}{4}t$, og for disse er $T'(t) = -C\frac{n\pi}{4}\sin\frac{n\pi}{4}t + D\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}t$, og dermed $T'(0) = D\frac{n\pi}{4}$, som skal være lik 0 iflg. den andre initialbetingelsen (at strengen holdes i ro idet den slippes løs ved $t = 0$). Dermed må vi ha $D = 0$, og det gir at $T(t) = C\cos\frac{n\pi}{4}t$. Dermed har vi at $u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = B\sin\frac{n\pi}{4}x \cdot C\cos\frac{n\pi}{4}t = E\sin\frac{n\pi}{4}x \cdot \cos\frac{n\pi}{4}t$, der vi har satt $BC = E$.

En enkel slik produktløsning vil ikke kunne oppfylle initialbetingelsen om $u(x,0)$, men summer (også uendelige summer, dvs. rekker) av slike kan det, og slike summer vil også oppfylle alle de øvrige kravene (inkl. $u_{xx} = u_{tt}$). Vi setter dermed

$$u(x,t) = \sum_1^\infty E_n \sin\frac{n\pi}{4}x \cdot \cos\frac{n\pi}{4}t$$

som gir at $u(x,0) = \sum_1^\infty E_n \sin\frac{n\pi}{4}x$, så vi ser at E_n er lik Fourier-sinus-koeffisientene til (den odde halvperiodiske utvidelsen av) $u(x,0)$, som her betyr at

$$E_n = \frac{2}{4}\int_0^4 u(x,0)\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{1}{100}x\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx + \int_1^2 (\frac{2}{100} - \frac{1}{100}x)\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{200}\left(\int_0^1 x\,\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx\right) .$$

Dette gir løsningen

$$u(x,t) = \underline{\underline{\frac{1}{200}\sum_1^\infty\left(\int_0^1 x\,\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi}{4}x\,dx\right)\sin\frac{n\pi}{4}x\cdot\cos\frac{n\pi}{4}t}} .$$

(b) Iflg. d'Alemberts løsning er $u(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{u}(x+ct,0)+\tilde{u}(x-ct,0))$, som her er $\frac{1}{2}(\tilde{u}(x+t,0)+\tilde{u}(x-t,0))$ (siden vi her har $c=1$), der $\tilde{u}(x,0)$ er den odde halvperiodiske utvidelsen av $u(x,0)$. Med $t=\frac{1}{2}$ får vi: $u(x,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\tilde{u}(x+\frac{1}{2},0)+\tilde{u}(x-\frac{1}{2},0))$, som er vist med tykke linjer nedenfor. Punktene $(0,0)$ og $(4,0)$, der strengen er fastspent, er tydelig markert. De tynne linjene viser (deler av) funksjonene $\frac{1}{2}\tilde{u}(x+\frac{1}{2},0)$ (som er lik 0 for $\frac{3}{2}\le x\le 4$) og $\frac{1}{2}\tilde{u}(x-\frac{1}{2},0)$ (som er lik 0 for $\frac{5}{2}\le x\le 4$).