Ta med tilsrekkelig med mellomregninger (evt. forklaringer, figurer, henvisninger til tidligere deler av oppgaven) slik at det er mulig å se hvordan svarene dine er framkommet. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

Funksjonen f er definert i hele $\mathbf{R}^2$ ved: $\quad f(x,y) = \dfrac{(2x+3y)^2}{x^2+y^2+4}$.

(a) Finn gradienten til f i $(1,1)$, og finn en likning for tangenten i $(1,1)$ til nivåkurven til f gjennom $(1,1)$.

(b) Finn den retningsderiverte til f i $(1,1)$ i retningen gitt ved $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

(c) Bruk lineær approksimasjon til å finne (tilnærmet) endringen i $f(x,y)$ fra $(x,y) = (1,1)$ til $(x,y) = (1.1\,,\ 0.9)$. Sett gjerne svaret på desimalform.

(d) Finn en likning for tangentplanet til grafen til f i det punktet på grafen som har $x = y = 1$.

Oppgave 2

Området D i 1. kvadrant av xy-planet er avgrenset av en del av sirkelen med radius 1 og sentrum i $(1,0)$ og en del av sirkelen med radius 1 og sentrum i $(0,1)$, slik:

$$D: \qquad (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \quad \underline{\text{og}} \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 1\ .$$

(a) Sett opp arealintegralet $\iint_D dA$ på iterert form i kartesiske koordinater.

(b) Sett opp arealintegralet $\iint_D dA$ på iterert form i polarkoordinater.

(c) Regn ut arealet av D.

Oppgave 3

Vektorfeltet $\vec{F}$ er definert i hele rommet $\mathbf{R}^3$ ved: $\vec{F}(x,y,z) = xz^2\,\vec{\imath} + x^2y\,\vec{\jmath} + y^2z\,\vec{k}$, og legemet T er den delen av av kula med sentrum i $(0,0,a)$ og radius a som er utenfor kula med sentrum i $(0,0,0)$ og radius a, dvs. T er gitt ved ulikhetene $x^2+y^2+(z-a)^2 \leq a^2$ og $x^2+y^2+z^2 \geq a^2$ (a er en positiv konstant).

(a) Finn uttrykkene for divergensen, $\nabla\cdot\vec{F}$, og "curlen", $\nabla\times\vec{F}$ til feltet $\vec{F}$.

(b) Finn volumet av legemet T.

(c) Finn fluksen til feltet $\vec{F}$ ut fra legemet T.

(d) Overflaten til legemet T består av to deler: S_1, som er en del av kuleflaten $x^2+y^2+z^2=a^2$, og S_2, som er en del av kuleflaten $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$. Begge flatene skal her være orientert med $\vec{n}$ rettet ut fra legemet T. Finn $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ og $\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$.

Oppgave 4

Funksjonen $u(x,t)$, $0 \leq x \leq 20$, $t \geq 0$, er slik at

(1) $u_{xx} = u_{tt}$ for $0 < x < 20$, $t > 0$,

(2) $u(0,t) = 0$ for $t \geq 0$,

(3) $u(20,t) = 0$ for $t \geq 0$,

(4) $u_t(x,0) = 0$ for $0 \leq x \leq 20$, og

(5) $u(x,0) = x$ for $0 \leq x \leq 2$, $u(x,0) = 4 - x$ for $2 \leq x \leq 4$, og $u(x,0) = 0$ for $4 \leq x \leq 20$.

(a) Tegn grafene til $u(x,1)$, $u(x,2)$, $u(x,3)$ og $u(x,4)$, alle for $0 \leq x \leq 8$, i separate koordinatsystemer.

(b) Det oppgis her at $u(x,t)$ kan uttrykkes på rekkeform, slik:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\frac{n\pi x}{20}\cos\frac{n\pi t}{20} .$$

Finn koeffisientene E_n i denne rekkeløsningen.

HØGSKOLEN I GJØVIK

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\;r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og "curl":

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$$

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z\ , \quad \text{der } \vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$$

$$\mathrm{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS \;=\; \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds \;=\; \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t)+aF(t)=0$ er $F(t)=Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t)+bF'(t)+cF(t)=0$ (der $a\neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2+br+c=0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$.

(2) Hvis $ar^2+br+c=0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t)=(C_1t+C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2+br+c=0$ har to komplekse røtter, $\alpha\pm\beta i$:
$F(t)=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2u_{xx}=u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x+ct)+G(x-ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x,0)=0$ kan skrives slik:

$$F(x+ct)+F(x-ct)\;.$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0,L]$, da gjelder følgende for de $x\in[0,L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad \text{der}$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad \text{og} \quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx,$$

og: $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad \text{der}\quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$