

Ta med tilstrekkelig med mellomregninger (evt. forklaringer, figurer, henvisninger til tidligere deler av oppgaven) slik at det er mulig å se hvordan svarene dine er framkommet. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

Funksjonen f er definert i hele \mathbf{R}^3 ved: $f(x, y, z) = xy(z^2 - 1)$, og flaten S er nivåflaten til f gjennom punktet $P : (2, 3, 4)$.

- (a) Finn en likning for tangentplanet til S i P .
- (b) Finn den enhetsvektoren \vec{u} som gir maksimal økning av f -verdiene når vi beveger oss ut fra punktet P i retningen \vec{u} .
- (c) Finn økningsraten (økning pr. lengdeenhet) for $f(x, y, z)$ ved bevegelse ut fra P i den retningen som gir maksimal økningsrate (dvs. i retningen gitt ved \vec{u} i (b)).
- (d) Finn den retningsderiverte til f i P i retningen fra P og rett mot origo.

Oppgave 2

Et legeme T i \mathbf{R}^3 er avgrenset av disse fire planene: xz -planet, yz -planet, planet gitt ved $z = 3x + 4y$, og planet gitt ved $z = 2 - x - y$. Sett opp og regn ut trippelintegralet for volumet av T : $V_T = \iiint_T dV$.

Oppgave 3

Et legeme T i \mathbf{R}^3 er nedre halvdel av kula med sentrum i $(0, 0, 1)$ og radius 1, dvs. det er gitt ved ulikhetene $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ og $z \leq 1$.

- (a) Sett opp trippelintegralet $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV$ på iterert form, i sylindervektorkoordinater. Integralet skal ikke regnes ut.
- (b) Sett opp trippelintegralet $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV$ på iterert form, i kulekoordinater. Integralet skal heller ikke her regnes ut.

Oppgave 4

Et vektorfelt \vec{F} er gitt i hele \mathbf{R}^3 unntatt på y -aksen ved:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + z\vec{k}}{x^2 + z^2} \quad ((x, z) \neq (0, 0)) .$$

- (a) Finn divergensen, $\nabla \cdot \vec{F}$, og curl'en, $\nabla \times \vec{F}$ til feltet \vec{F} .
- (b) Finn verdien av arbeidsintegralet $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, der C_1 er sirkelen i planet $z = 2$ med sentrum i $(0, 0, 2)$ og radius 1, orientert mot urviserne, sett fra origo.
- (c) Finn verdien av arbeidsintegralet $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, der C_2 er sirkelen i planet $y = 2$ med sentrum i $(0, 2, 0)$ og radius 1, orientert mot urviserne, sett fra origo.
- (d) Finn ut om feltet \vec{F} er konservativt i sitt definisjonsområde.

Oppgave 5

I denne oppgaven skal R være rektangelet i xy -planet gitt ved $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, der a og b er positive konstanter.

Finn de produktfunksjonene $u(x, y) = X(x)Y(y)$ på R som er slik at $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i hele R , og samtidig er slik at $u(0, y) = 0$ og $u(a, y) = 0$ for alle y mellom 0 og b og $u(x, 0) = 0$ for alle x mellom 0 og a .

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left. \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad \text{der} \quad J(u, v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left. \begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

$$\text{der } J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left. \begin{array}{l} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

Gradient, divergens og “curl”:

$$\text{grad}(f) = \nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z, \quad \text{der } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{i} - (R_x - P_z)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning):
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, \vec{n} er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og \vec{F} er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S .

Stokes' setning:
$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, \vec{n} er en orientering av S , C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. \vec{n} , og \vec{F} er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S .

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t) + aF(t) = 0$ er $F(t) = Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$ (der $a \neq 0$) avhenger av a , b og c , slik:

(1) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2 :

$$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

(2) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har bare én (reell) rot, r : $F(t) = (C_1 t + C_2) e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to komplekse røtter, $\alpha \pm \beta i$:

$$F(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

Partielle differensiallikninger,

d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x + ct) + G(x - ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x, 0) = 0$ kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct).$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0, L]$, da gjelder følgende for de $x \in [0, L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx,$$

$$\text{og:} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx.$$