NTNU I GJØVIK **BOKMÅL**

EKSAMEN I MATEMATIKK 3 (REA3011)

7. APRIL 2017

Faglærer: Hans Engenes
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.
Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.
Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

Flaten S er grafen til funksjonen f gitt ved: $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+2y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, og P er det punktet på S som har $x = 1$ og $y = 2$.

(a) Finn en normalvektor til S i P.

(b) Finn en likning for tangentplanet til S i P.

(c) Finn et uttrykk for lineærapproksimasjonen, uttrykt ved Δx og Δy, til endringen Δf i $f(x,y)$ ved flytting fra $(x,y) = (1,2)$ til $(x,y) = (1+\Delta x, 2+\Delta y)$.

Oppgave 2

Området D i xy-planet er den delen av sirkelområdet $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ som ligger innenfor sirkelen $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Sett opp dobbeltintegralet

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dA$$

på iterert form i polarkoordinater. Regn også ut dette dobbeltintegralet.

Oppgave 3

Legemet T er avgrenset av kuleflaten med sentrum i $(1,0,0)$ og radius 1. Sett opp trippelintegralet

$$\iiint_T (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

på iterert form i kulekoordinater.

Oppgave 4

Fins det en funksjon f definert i hele rommet, $\mathbf{R}^3$, med gradientfelt lik

$$xy\,\vec{\imath} + yz\,\vec{\jmath} + xz\,\vec{k}$$

overalt i $\mathbf{R}^3$? Hvis du mener "ja", finn en slik funksjon. Hvis du mener "nei", forklar hvorfor.

Oppgave 5

Vektorfeltet $\vec{F}$ er gitt i hele $\mathbf{R}^3$ ved:

$$\vec{F}(x, y, z) = xy\,\vec{\imath} + yz\,\vec{\jmath} + xz\,\vec{k}\,.$$

(a) Finn $\mathrm{curl}(\vec{F})$ og $\mathrm{div}(\vec{F})$.

(b) Beregn arbeidsintegralene $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ og $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, der C_1 er den orienterte kurven fra $(0, 0, 0)$ til $(4, 8, 16)$ gitt ved parametriseringen $\vec{r}_1(t) = t^2\vec{\imath} + t^3\vec{\jmath} + t^4\vec{k}$, $t : 0 \to 2$, og C_2 er den orienterte kurven fra $(4, 8, 16)$ til $(0, 0, 0)$ gitt ved parametriseringen $\vec{r}_2(t) = (4 - t)\vec{\imath} + (8 - 2t)\vec{\jmath} + (16 - 4t)\vec{k}$, $t : 0 \to 4$

(c) Beregn arbeidsintegralet $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ der C er den orienterte lukkede kurven som starter med å følge C_1 (fra (b) ovenfor) fra $(0, 0, 0)$ til $(4, 8, 16)$, og som fortsetter ved å følge C_2 tilbake til $(0, 0, 0)$.

Oppgave 6

Vektorfeltet $\vec{F}$ er gitt i hele $\mathbf{R}^3$ ved: $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\,\vec{\imath} - y^2\,\vec{\jmath}$, legemet T er den delen av sylinderen $x^2 + y^2 \leq 9$ som ligger mellom planene $z = 2x + 3y - 4$ og $z = 2x + 3y$. S_1 er toppflaten til T (dvs. den delen av overflaten til T som ligger i planet $z = 2x+3y$) og S_2 er resten av overflaten til T, begge orientert ved den normalvektoren $\vec{n}$ som konsekvent peker ut fra T.

(a) Beregn fluksintegralet $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$.

(b) Beregn fluksintegralet $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$.

HØGSKOLEN I GJØVIK

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\; r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og "curl":

$$\text{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z\,, \quad \text{der } \vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$$

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS \;=\; \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds \;=\; \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t) + aF(t) = 0$ er $F(t) = Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$ (der $a \neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$.

(2) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t) = (C_1t + C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to komplekse røtter, $\alpha \pm \beta i$:
$F(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$.

Partielle differensiallikninger, d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2u_{xx} = u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x + ct) + G(x - ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x, 0) = 0$ kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct)\ .$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0, L]$, da gjelder følgende for de $x \in [0, L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,$$

og: $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$