Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt i hele $\mathbf{R}^3$, unntatt på x-aksen, ved: $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{y^2+z^2}$, og S er nivåflaten til f gjennom punktet $P(1,1,1)$.

(a) Finn gradienten til f i P, $\nabla f(1,1,1)$.

(b) Finn $D_{\vec{v}}f(1,1,1)$, den retningsderiverte til f i P i retningen gitt ved $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$.

(c) Finn en vektor $\vec{w}$ som gir størst mulig verdi for $D_{\vec{w}}f(1,1,1)$

Oppgave 2

Området D i xy-planet er avgrenset av kurven $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, den kvarte sirkelbuen mellom $(1,1)$ og $(0,2)$ med sentrum i $(0,1)$, og intervallet $0 \le y \le 2$ på y-aksen.

(a) Sett opp dobbeltintegralet $\iint_D y\,dA$ på iterert form i kartesiske koordinater.

(b) Sett opp dobbeltintegralet $\iint_D y\,dA$ på iterert form i polarkoordinater.

(c) Regn ut dobbeltintegralet $\iint_D y\,dA$.

Oppgave 3

En torus $T_{a,b}$, der a og b er reelle tall med $0 < b < a$, dannes ved at sirkelområdet i xz-planet med sentrum i $(a,0,0)$ og radius b roteres en hel omdreining om z-aksen. Flaten $S_{a,b}$ er overflaten til $T_{a,b}$.

(a) Hvert konstant-θ-plan i $\mathbf{R}^3$ skjærer $S_{a,b}$ i en sirkel C med radius b og sentrum i et punkt Q med avstand a fra z-aksen. La P_0 være det punktet på C som er lengst fra z-aksen. Hvert punkt P_1 på C kan angis ved vinkelen α dannet av de to radiene QP_0 og QP_1 i C. Dermed kan hvert punkt på $S_{a,b}$ angis ved de to vinklene θ og α. Vis med figur og/eller tekst hvordan dette gir denne parametriseringen av $S_{a,b}$:

$$\vec{r}(\alpha,\theta) = (a + b\cos\alpha)\cos\theta\,\vec{\imath} + (a + b\cos\alpha)\sin\theta\,\vec{\jmath} + b\sin\alpha\,\vec{k} \quad (0 \le \alpha \le 2\pi, 0 \le \theta \le 2\pi).$$

Denne parametriseringen kan brukes i de neste deloppgavene.

(b) Finn arealet av $S_{a,b}$.

(c) Finn fluksen ut fra $T_{a,b}$ gjennom $S_{a,b}$ av vektorfeltet $\vec{F}(x,y,z) = z\vec{k}$.

(d) Finn volumet av torusen $T_{a,b}$.

Oppgave 4

Flaten S i $\mathbf{R}^3$ er den delen av sylinderflaten med x-aksen som akse og radius 2 som ligger over xy-planet og innenfor sylinderen med z-aksen som akse og radius 1, dvs. at den er gitt ved likningen $y^2 + z^2 = 4$ og ulikhetene $x^2 + y^2 \leq 1$ og $z \geq 0$. Kurven C er randa til S, orientert "mot urviserne sett ovenfra".

(a) Beregn arbeidsintegralet $\oint_C x\,\vec{\jmath}\cdot d\vec{r}$ ved å bruke Stokes' teorem.

(b) Beregn arbeidsintegralet $\oint_C x\,\vec{\jmath}\cdot d\vec{r}$ uten å bruke Stokes' teorem.

Oppgave 5

I en varmeledende vegg med tykkelse L starter temperaturfunksjonen for $0 \leq x \leq L$ slik: $u(x,0) = a\sin\frac{2\pi}{L}x$, der a er en konstant. På begge sider av veggen ($x = 0$ og $x = L$) holdes temperaturen konstant lik 0. Anta at $u(x,t)$ er slik at $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ for $0 < x < L$ og $t > 0$, der α er en konstant, og finn et uttrykk for hvor lang tid det tar før starttemperaturen ved $x = L/4$ er halvert, dvs. løs likningen $u(L/4,t) = \frac{1}{2}u(L/4,0)$ m.h.p. t.

NTNU I GJØVIK

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\;r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og “curl”:

$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$

$\mathrm{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$, der $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$

$$\mathrm{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS \;=\; \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds \;=\; \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t) + aF(t) = 0$ er $F(t) = Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$ (der $a \neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

(2) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t) = (C_1 t + C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to komplekse røtter, $\alpha \pm \beta i$:
$F(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x + ct) + G(x - ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x, 0) = 0$ kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct)\ .$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0, L]$, da gjelder følgende for de $x \in [0, L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx,$$

og: $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$