

# EKSAMEN I MATEMATIKK 3 (REA3011)

\_\_\_\_. AUGUST 2016 KL. \_\_\_\_\_ – \_\_\_\_\_

**Faglærer:** Hans Engenes

**Tillatte hjelpemidler:** Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.

Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.

Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

## Oppgave 1

Funksjonen  $f$  er gitt i hele  $\mathbf{R}^3$  ved:  $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + xz^2$ , og  $S$  er nivåflaten til  $f$  gjennom punktet  $P(3, 2, 1)$ .

- (a) Finn en likning for tangentplanet til  $S$  i  $P$ .
- (b) Finn enhetsvektoren som peker i retningen for sterkest mulig økning av  $f$ -verdier i  $P$ .

## Oppgave 2

Området  $R$  i  $xy$ -planet er avgrenset av  $x$ -aksen mellom origo og punktet  $(2, 0)$  og av den øvre halvdelen av sirkelen med sentrum i  $(1, 0)$  og radius 1. Funksjonen  $f$  er definert på  $R$  ved:  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

- (a) Sett opp dobbeltintegralet  $\iint_R f(x, y) dA$  på iterert form i kartesiske koordinater, ved å la det indre integralet være m.h.p.  $x$  og det ytre m.h.p.  $y$ .
- (b) Sett opp dobbeltintegralet  $\iint_R f(x, y) dA$  på iterert form i kartesiske koordinater, ved å la det indre integralet være m.h.p.  $y$  og det ytre m.h.p.  $x$ .
- (c) Sett opp dobbeltintegralet  $\iint_R f(x, y) dA$  på iterert form i polarkoordinater, ved å la det indre integralet være m.h.p.  $r$  og det ytre m.h.p.  $\theta$ .
- (d) Regn ut dobbeltintegralet  $\iint_R f(x, y) dA$ .

### Oppgave 3

De fire punktene i  $\mathbf{R}^3$   $P_0 : (0, 0, 0)$ ,  $P_1 : (2, 0, 0)$ ,  $P_2 : (2, 2, 0)$  og  $P_3 : (2, 1, 1)$ , er hjørnene i et tetraeder  $T$  (dvs. et legeme avgrenset av fire plane, trekantede flater).

Beregn trippelintegralet  $\iiint_T x^2 dV$ .

### Oppgave 4

Den orienterte kurven  $C$  starter i  $(3, 0, 0)$  og ender i  $(3, 0, 4)$ , og er gitt ved parametriseringen  $\vec{r}(t) = 3 \cos(2\pi t) \vec{i} + 3 \sin(2\pi t) \vec{j} + 4t \vec{k}$ ,  $t : 0 \rightarrow 1$ .

(a) Beregn lengden av  $C$ .

(b) Beregn arbeidsintegralet  $\int_C (2y\vec{i} + 3z\vec{j}) \cdot d\vec{r}$ .

### Oppgave 5

Vektorfeltet  $\vec{F}$  er gitt i  $\mathbf{R}^3$  ved:  $\vec{F}(x, y, z) = z^2\vec{i} - x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ . Flaten  $S$  er gitt ved:  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ , og den er orientert ved den enhetsnormalvektoren som overalt på  $S$  peker bort fra origo.

(a) Finn  $\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F}$  og  $\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$ . Er feltet  $\vec{F}$  konservativt i  $\mathbf{R}^3$ ?

(b) Beregn fluksintegralet  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ .

(c) Beregn fluksintegralet  $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ .

## FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

### Koordinatskifte i multiple integraler:

**Dobbeltintegral, generelt:**  $\left. \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad \text{der} \quad J(u, v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

### Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

**Trippelintegral, generelt:**  $\left. \begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

$$\text{der } J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

### Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

**Trippelintegral, kulekoordinater:**  $\left. \begin{array}{l} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

### Gradient, divergens og “curl”:

$$\text{grad}(f) = \nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z, \quad \text{der } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{i} - (R_x - P_z)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

## To viktige setninger:

**Divergenssetningen (Gauss' setning):** 
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

dersom  $T$  er et begrenset legeme,  $S$  er overflaten til  $T$  og er stykkevis glatt,  $\vec{n}$  er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på  $S$  og  $\vec{F}$  er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele  $T$  og på hele  $S$ .

**Stokes' setning:** 
$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$$

dersom  $S$  er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate,  $\vec{n}$  er en orientering av  $S$ ,  $C$  er randkurven til  $S$  positivt orientert m.h.p.  $\vec{n}$ , og  $\vec{F}$  er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder  $S$ .

## Ordinære differensiallikninger:

### 1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av  $F'(t) + aF(t) = 0$  er  $F(t) = Ce^{-at}$ .

### 2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av  $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$  (der  $a \neq 0$ ) avhenger av  $a$ ,  $b$  og  $c$ , slik:

(1) Hvis  $ar^2 + br + c = 0$  har to forskjellige reelle røtter,  $r_1$  og  $r_2$ :

$$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

(2) Hvis  $ar^2 + br + c = 0$  har bare én (reell) rot,  $r$ :  $F(t) = (C_1 t + C_2) e^{rt}$ .

(3) Hvis  $ar^2 + br + c = 0$  har to komplekse røtter,  $\alpha \pm \beta i$ :

$$F(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

## Partielle differensiallikninger,

### d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$ :

Allmenn løsning kan skrives slik:  $F(x + ct) + G(x - ct)$ .

Løsninger som oppfyller randbetingelsen  $u_t(x, 0) = 0$  kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct).$$

## Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis  $f(x)$  er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på  $[0, L]$ , da gjelder følgende for de  $x \in [0, L]$  der  $f$  er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx,$$

$$\text{og: } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ der } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx.$$