

# EKSAMEN I MATEMATIKK 3 (REA3011)

7. APRIL 2016 KL. 1630 – 2030

**Faglærer:** Hans Engenes

**Tillatte hjelpemidler:** Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.

Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.

Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

## Oppgave 1

Funksjonen  $f$  er gitt ved:  $f(x, y, z) = \frac{xy^2}{z^3}$ ,  $z > 0$ , og  $P$  er punktet  $(1, 2, 3)$ .

- (a) Finn gradientens verdi i  $P$ ,  $\nabla f(1, 2, 3)$ .
- (b) Finn et uttrykk for den lineære approksimasjonen til  $f$  i  $P$ .
- (c) Finn den maksimale verdien for den retningsderiverte til  $f$  i  $P$ .
- (d) Finn en likning for tangentplanet i  $P$  til nivåflaten til  $f$  gjennom  $P$ .
- (e) Finn den enhetsvektoren som peker i retningen for maksimal verdi av den retningsderiverte til  $f$  i  $P$ .

## Oppgave 2

Området  $D$  i  $xy$ -planet er avgrenset av sirkelen med sentrum i  $(2, 5)$  og radius 3, kurven  $C$  er randa til  $D$ , orientert “mot utviserne”, og vektorfeltet  $\vec{F}$  er gitt i hele  $xy$ -planet ved:  $\vec{F}(x, y) = (x^5 + 5y)\vec{i} + (8x - y^8)\vec{j}$ . Beregn arbeidsintegralet  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

## Oppgave 3

Legemet  $T$  er avgrenset av kuleflaten med sentrum i  $(1, 2, 3)$  og radius 4, flaten  $S$  er overflaten til  $T$ , orientert “ut av  $T$ ”, og vektorfeltet  $\vec{F}$  er gitt i hele rommet ved:  $\vec{F}(x, y, z) = (9x + 4y^2 + 5z^3)\vec{i} + (x^4 - 2y + 2z^3)\vec{j} + (2x^3 - 3y^4 - z)\vec{k}$ .

Beregn fluksen  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ .

## Oppgave 4

$C_1$  er det rette orienterte linjestykket i  $\mathbf{R}^3$  fra  $(2, 0, 0)$  til  $(0, 2, 0)$ .

(a) Beregn arbeidsintegralet  $\int_{C_1} (2y\vec{i} + 3x\vec{j}) \cdot d\vec{r}$ .

(b) Vis at begge punktene  $(2, 0, 0)$  og  $(0, 2, 0)$  ligger på skjæringskurven for sylinderflaten gitt ved  $x^2 + y^2 = 4$  og grafen til  $z = 2xy/(x^2 + y^2)$ .

(c) Beregn arbeidsintegralet  $\int_{C_2} (2y\vec{i} + 3x\vec{j}) \cdot d\vec{r}$ , der  $C_2$  er den delen av skjæringskurven til sylinderflaten  $x^2 + y^2 = 4$  og grafen til  $z = 2xy/(x^2 + y^2)$  som er orientert fra  $(2, 0, 0)$  til  $(0, 2, 0)$ , og som passerer gjennom punktet  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ .

## Oppgave 5

Vektorfeltet  $\vec{F}$  er gitt i  $\mathbf{R}^3$  unntatt  $z$ -aksen ved:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)\vec{i} + \left(x + \frac{y}{x^2 + y^2}\right)\vec{j}.$$

(a) Finn  $\text{curl}(\vec{F})$  og  $\text{div}(\vec{F})$ .

(b) Beregn arbeidsintegralet  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , der  $C$  er enhetssirkelen i  $xy$ -planet (dvs. sentrum i origo og radius 1), orientert "mot urviserne", sett fra  $(0, 0, 5)$ .

(c) Finn ut om  $\vec{F}$  er konservativt i sitt definisjonsområde.

(d) La  $S$  være flaten gitt ved  $z = (1 - x^2 - y^2)^{1/4}$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ , orientert oppover (dvs. med  $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$  overalt på  $S$ ), og beregn fluksen  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ .

## Oppgave 6

En gitarstreng med lengde 1 m trekkes 2 mm ut fra sin hvilestilling i et punkt 0,70 m fra venstre ende. Den holdes i ro inntil den slippes, ved tidspunktet  $t = 0$ . Strengen beveger seg deretter slik at utslaget  $u(x, t)$  fra hvilestillingen,  $x$  m fra venstre ende ved tiden  $t$  sekunder, er gitt ved  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  for  $0 < x < 1$  og  $t > 0$ , der  $c = 1000$  m/s.

Tegn skisser av strengens form ved tidspunktene 0,0001, 0,0003 og 0,0006 sekunder. Bruk målestokk der 10 cm på skissene i  $x$ -retningen svarer til 1 m, mens 2 cm i  $y$ -retningen svarer til 1 mm.

## FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

### Koordinatskifte i multiple integraler:

**Dobbeltintegral, generelt:**  $\left. \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad \text{der} \quad J(u, v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

### Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

**Trippelintegral, generelt:**  $\left. \begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

$$\text{der } J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

### Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

**Trippelintegral, kulekoordinater:**  $\left. \begin{array}{l} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

### Gradient, divergens og “curl”:

$$\text{grad}(f) = \nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z, \quad \text{der } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{i} - (R_x - P_z)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

## To viktige setninger:

**Divergenssetningen (Gauss' setning):**  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F} \, dV$

dersom  $T$  er et begrenset legeme,  $S$  er overflaten til  $T$  og er stykkevis glatt,  $\vec{n}$  er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på  $S$  og  $\vec{F}$  er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele  $T$  og på hele  $S$ .

**Stokes' setning:**  $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$

dersom  $S$  er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate,  $\vec{n}$  er en orientering av  $S$ ,  $C$  er randkurven til  $S$  positivt orientert m.h.p.  $\vec{n}$ , og  $\vec{F}$  er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder  $S$ .

## Ordinære differensiallikninger:

### 1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av  $F'(t) + aF(t) = 0$  er  $F(t) = Ce^{-at}$ .

### 2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av  $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$  (der  $a \neq 0$ ) avhenger av  $a$ ,  $b$  og  $c$ , slik:

(1) Hvis  $ar^2 + br + c = 0$  har to forskjellige reelle røtter,  $r_1$  og  $r_2$ :

$$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

(2) Hvis  $ar^2 + br + c = 0$  har bare én (reell) rot,  $r$ :  $F(t) = (C_1 t + C_2) e^{rt}$ .

(3) Hvis  $ar^2 + br + c = 0$  har to komplekse røtter,  $\alpha \pm \beta i$ :

$$F(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

## Partielle differensiallikninger,

### d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$ :

Allmenn løsning kan skrives slik:  $F(x + ct) + G(x - ct)$ .

Løsninger som oppfyller randbetingelsen  $u_t(x, 0) = 0$  kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct).$$

## Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis  $f(x)$  er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på  $[0, L]$ , da gjelder følgende for de  $x \in [0, L]$  der  $f$  er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx,$$

$$\text{og: } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ der } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx.$$