HØGSKOLEN I GJØVIK

EKSAMEN I
MATEMATIKK 3 (REA3011)

16. DESEMBER 2015 KL. 0900 – 1300

Faglærer: Hans Engenes
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.
Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.
Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

Funksjonen f er definert i kvadratet $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, ved:

$$f(x,y) \ = \ \sin \pi x \, \sin \pi y$$

og P er punktet $(1/3, 2/3)$.

(a) Finn gradientens verdi i P, $\nabla f(1/3, 2/3)$.

(b) Finn en likning for tangentplanet til grafen til f i punktet $(1/3, 2/3, f(1/3, 2/3))$.

(c) Finn den maksimale verdien for den retningsderiverte til f i P.

(d) Finn volumet av legemet mellom grafen til f og kvadratet $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Oppgave 2

Legemet T er tetraederet (dvs. legemet avgrenset av fire plane flater) med hjørner $P_1 : (1,2,3)$, $P_2 : (1,2,0)$, $P_3 : (2,0,3)$ og $P_4 : (0,0,0)$. Finn volumet av T.

Oppgave 3

Jordas tetthet (δ) er ikke konstant i hele jordkloden. Vi skal her anta at den avhenger av avstanden ρ fra jordsenteret, og ikke av andre variable, og at den avtar lineært, slik: $\delta(\rho) = a - b\rho$ for $0 \leq \rho \leq R$, der R er jordas radius (vi regner jorda som en perfekt kule med radius R), og a og b er konstanter.

(a) Finn jordas masse M uttrykt ved a, b og R.

(b) Finn $\delta(0)$ (tettheten i jordas sentrum), med utgangspunkt i Wikipedias verdier $M = 5{,}972 \cdot 10^{27}\text{g}$ og $R = 6{,}371 \cdot 10^{8}\text{cm}$, og en anslått “jordskorpetetthet” $\delta(R) = 3{,}000\,\text{g/cm}^3$. Gi svaret med 2 desimaler.

Oppgave 4

Vektorfeltet $\vec{F}$ er gitt i hele $\mathbf{R}^3$ ved:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2 + 2z(x-y))\vec{\imath} + (z^2 + 2x(y-z))\vec{\jmath} + (x^2 + 2y(z-x))\vec{k}\,,$$

legemet T er avgrenset ved disse ulikhetene i kulekoordinater:

$$T: \ 2 \leq \rho \leq 3, \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

og S er overflaten til T, orientert ved at enhetsnormalvektoren $\vec{n}$ på S overalt peker ut fra T.

(a) Finn $\operatorname{div}(\vec{F})$ $(= \nabla \cdot \vec{F})$ og $\operatorname{curl}(\vec{F})$ $(= \nabla \times \vec{F})$.

(b) Finn feltets fluks ut fra T, dvs. $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$.

(c) Planet $\theta = \pi/6$ skjærer flaten S i en lukket kurve C. Finn $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ når C er orientert slik at enhetstangentvektoren $\vec{T}$ i punktet $(0,0,3)$ har positiv 1.-komponent (dvs. at $\vec{T} \cdot \vec{\imath}$ her er > 0).

Oppgave 5

En yttervegg med tykkelse $L = 1$, laget i et homogent materiale, har hatt konstant temperatur lik 20 grader på innsiden og 0 grader på utsiden så lenge at temperaturen inne i veggen har blitt stabil, dvs. at den avhenger av avstanden x fra utsiden ($0 \leq x \leq 1$), men ikke av tiden t. Så ved tiden $t = 0$, faller utetemperaturen brått til -10 grader, og holder seg slik inntil et senere tidspunkt T. Temperaturen inne i veggen, $u(x,t)$ for $t \geq 0$, vil da være slik at $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ for $0 < x < 1$ og $t > 0$, der α^2 er en konstant for materialet i veggen.

Finn et uttrykk for temperaturfunksjonen $u(x,t)$ som gjelder for $0 < x < 1$ og for $0 < t < T$.

HØGSKOLEN I GJØVIK

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\;r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og "curl":

$$\text{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z\,, \quad \text{der } \vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$$

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \;=\; \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \;=\; \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t) + aF(t) = 0$ er $F(t) = Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$ (der $a \neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

(2) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t) = (C_1 t + C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to komplekse røtter, $\alpha \pm \beta i$:
$F(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x + ct) + G(x - ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x, 0) = 0$ kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct)\ .$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0, L]$, da gjelder følgende for de $x \in [0, L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

og: $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, der $\displaystyle b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$.