HØGSKOLEN I GJØVIK

EKSAMEN I
MATEMATIKK 3 (REA3011)

17. DESEMBER 2014 KL. 0900 – 1300

Faglærer: Hans Engenes
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.
Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.
Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

(a) Sett opp en likning for tangentplanet til flaten i rommet gitt ved en likning $f(x, y, z) = 0$, i et punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ på flaten.

(b) Vis at punktet $P = (5, 4, 7)$ ligger på flaten S gitt ved likningen

$$2x^3y + 3xy^3 = 40z^2 \ ,$$

og finn en likning for tangentplanet til S i P.

Oppgave 2

Området R i xy-planet er den delen av sirkelområdet $x^2+y^2 \leq 2$ som ligger over kurven $y = x^2$. Randkurven til R er C, og den er her orientert "mot urviserne" rundt R.

(a) Beregn arbeidsintegralet $\oint_C (x^2\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}) \cdot d\vec{r}$ direkte, dvs. uten bruk av Greens eller Stokes' teoremer.

(b) Beregn arbeidsintegralet $\oint_C (x^2\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}) \cdot d\vec{r}$ ved hjelp av Greens teorem.

Oppgave 3

Legemet T i $\mathbf{R}^3$ er den delen av terningen (kuben) $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$, som ligger *under* planet gitt ved $x + y + z = 5$.

(a) Finn volumet av T.

(b) Sett opp på iterert form og regn ut integralet $\iiint_T z\,dV$.

Oppgave 4

Flaten S i $\mathbf{R}^3$ er gitt ved parametriseringen $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{\imath} + u\sin v\,\vec{\jmath} + u^2\vec{k}$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le \pi$.

(a) Sett opp, på iterert form, et integral for arealet av S.

(b) Finn arealet av S ved å løse integralet i (a).

(Hint: Hvis det skulle bli nødvendig å regne ut et integral av typen $\int \sqrt{at^4 + t^2}dt$, sett da t utenfor rottegnet: $\int \sqrt{t^2(at^2+1)}dt = \int t\sqrt{at^2+1}dt$, og gå videre med substitusjonen $w = at^2 + 1$.)

Oppgave 5

(a) For hvilke verdier av konstantene a, b og c er feltet

$$\vec{F}(x,y,z) = a\,yz\,\vec{\imath} + b\,xz\,\vec{\jmath} + c\,xy\,\vec{k}\ , \quad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$$

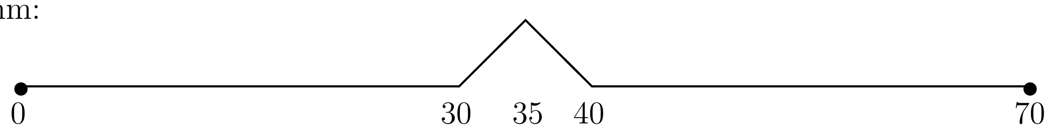
konservativt i $\mathbf{R}^3$?

(b) Beregn arbeidsintegralet $\int_C (2yz\,\vec{\imath} + 3xz\,\vec{\jmath} + 4xy\,\vec{k}) \cdot d\vec{r}$ ved direkte regning, dvs. uten bruk av Stokes' teorem, når C er sirkelen i planet $z = 1$ med sentrum på z-aksen og radius 2, orientert mot utviserne sett ovenfra.

(c) Beregn arbeidsintegralet i (b) ved å bruke Stokes' teorem.

Oppgave 6

En gitarstreng med lengde 70 cm blir holdt i ro med denne formen, der den vertikale målestokken er sterkt overdrevet — høyden opp til den spisse toppen er egentlig 0,5 mm:



fram til tidspunktet $t = 0$, da den slippes fri (bortsett fra endepunktene, som holdes fast hele tiden). For $t > 0$ beveger strengen seg i hht. bølgelikningen $c^2u_{xx} = u_{tt}$, der $u(x,t)$ er strengens høyde over hvilestillingen ved tidspunkt t og posisjon x ($0 \le x \le 70$), og der konstanten c er lik 500 m/s (meter pr. sekund).

Beskriv med en kort tekst hvordan strengen beveger seg for $t > 0$. Skisser strengens form ved $t = 0{,}0002$ s (sekunder) og ved $t = 0{,}001$ s.

HØGSKOLEN I GJØVIK

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\; r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og "curl":

$\text{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$

$\text{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$, der $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \;=\; \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \;=\; \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t) + aF(t) = 0$ er $F(t) = Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$ (der $a \neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

(2) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t) = (C_1 t + C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to komplekse røtter, $\alpha \pm \beta i$:
$F(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x + ct) + G(x - ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x, 0) = 0$ kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct)\ .$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0, L]$, da gjelder følgende for de $x \in [0, L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx,$$

og: $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{der} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$