HØGSKOLEN I GJØVIK

EKSAMEN I
MATEMATIKK 3 (REA3011)

24. MARS 2014 KL. 1300 – 1700

Faglærer: Hans Engenes
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.
Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.
Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

Funksjonen f er definert i hele $\mathbf{R}^3$ ved: $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{2+\sin(\pi xy^2z^3)}$, og P er punktet $(1,1,1)$.

(a) Finn gradienten til f i P, $\nabla f(P)$, og den retningsderiverte $D_{\vec{v}}f(P)$ når $\vec{v}$ er vektoren fra P til punktet $(1,2,3)$.

(b) Finn en likning for tangentplanet i P til nivåflaten til f gjennom P.

Oppgave 2

Området D i xy-planet er avgrenset av en sirkel med sentrum i $(1,1)$ og radius $\sqrt{2}$.

(a) Sett opp dobbeltintegralet $\iint_D (x^2+y^2)\,dA$ på iterert form (med integrasjonsgrenser satt opp på begge nivåer), i kartesiske koordinater (x og y, i en rekkefølge du selv velger).

(b) Sett opp dobbeltintegralet $\iint_D (x^2+y^2)\,dA$ på iterert form (med integrasjonsgrenser satt opp på begge nivåer), i polarkoordinater (r og θ).

Oppgave 3

Området D er den delen av xy-planet som ligger utenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Vektorfeltet $\vec{F}$ er definert i D ved:

$$\vec{F}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2-1}\,\vec{\imath} + \frac{y}{x^2+y^2-1}\,\vec{\jmath}\,, \quad (x,y) \in D\,.$$

Finn ut om $\vec{F}$ er konservativt i D.

(b) Vektorfeltet $\vec{G}$ er definert i D ved:

$$\vec{G}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} - \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}\,, \quad (x,y) \in D\,.$$

Finn ut om $\vec{G}$ er konservativt i D.

Oppgave 4

Vektorfeltet $\vec{F}$ er definert i hele $\mathbf{R}^3$ ved: $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{\jmath} + yz\,\vec{k}$, S er sirkelflaten i planet $y = 2$ med sentrum i $(0,2,0)$ og radius 1, og C er randkurven til S, orientert i retningen fra $(1,2,0)$ til $(0,2,1)$, så til $(-1,2,0)$ og $(0,2,-1)$ og til slutt til $(1,2,0)$.

(a) Beregn fluksen $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ til feltet $\vec{F}$ gjennom flaten S i retningen gitt ved $\vec{n} = \vec{\jmath}$.

(b) Beregn arbeidsintegralet $\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ ved direkte regning, dvs. uten bruk av Stokes' teorem.

Oppgave 5

En massiv og homogen vegg har tykkelse $L = 1$ (benevning: meter) og temperaturen på begge sider av veggen holdes konstant på 0 grader Celsius. Ved tiden $t = 0$ er temperaturen inne i veggen gitt ved funksjonen $f(x) = 20\sin\pi x$ (benevning: grader Celsius), der x er målt fra yttersiden av veggen. Ved senere tidspunkter t (benevning: sekunder) vil noe av varmen i veggen ha "lekket" ut, til begge sider, ved varmeledning. Vi forutsetter at temperaturfunksjonen i veggen, $u(x,t)$ $(0 \le x \le 1$ og $t \ge 0)$ følger varmeledningslikningen $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ der konstanten α^2 her settes til $0.6 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$ (dette er omtrentlig α^2-verdi for betong).

Finn en konstant K slik at funksjonen $u(x,t) = 20\sin\pi x \cdot e^{Kt}$ oppfyller både varmeledningslikningen og randbetingelsene, og finn ut hvor lang tid det tar før temperaturen midt inne i veggen, dvs. i $x = 0.5\ m$, er kommet ned til $10°C$.

HØGSKOLEN I GJØVIK

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\;r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og "curl":

$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$

$\mathrm{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$, der $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$

$$\mathrm{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS \;=\; \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds \;=\; \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t)+aF(t)=0$ er $F(t)=Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t)+bF'(t)+cF(t)=0$ (der $a\neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2+br+c=0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$.

(2) Hvis $ar^2+br+c=0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t)=(C_1t+C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2+br+c=0$ har to komplekse røtter, $\alpha\pm\beta i$:
$F(t)=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2u_{xx}=u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x+ct)+G(x-ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x,0)=0$ kan skrives slik:

$$F(x+ct)+F(x-ct)\ .$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0,L]$, da gjelder følgende for de $x\in[0,L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad \text{der}$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad\text{og}\quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx,$$

og: $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad \text{der}\quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$