HØGSKOLEN I GJØVIK

EKSAMEN I
MATEMATIKK 3 (REA3011)

20. DESEMBER 2013 KL. 0900 – 1300

Faglærer: Hans Engenes
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.
Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.
Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

Funksjonen f er definert i hele $\mathbf{R}^3$ ved: $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+1}{y^2+z^2+2}$, og P er punktet $(3,-2,1)$.

(a) Finn $\nabla f(P)$, sett opp en likning for nivåflaten til f gjennom P, og sett opp en likning for nivåflatens tangentplan i P.

(b) Finn den enhetsvektoren $\vec{u}$ som gir maksimal verdi for den retningsderiverte $D_{\vec{u}}f(P)$.

Oppgave 2

Legemet T er kula med sentrum i punktet $(0,0,2)$ og radius 2.

(a) Sett opp trippelintegralet $\iiint_T z^2 dV$ på iterert form (med integrasjonsgrenser satt opp på alle tre nivåer), i kartesiske koordinater (x, y og z).

(b) Sett opp trippelintegralet $\iiint_T z^2 dV$ på iterert form (med integrasjonsgrenser satt opp på alle tre nivåer), i sylindriske koordinater (r, θ og z).

(c) Sett opp trippelintegralet $\iiint_T z^2 dV$ på iterert form (med integrasjonsgrenser satt opp på alle tre nivåer), i kulekoordinater (ρ, ϕ og θ).

(d) Regn ut verdien av $\iiint_T z^2 dV$.

Oppgave 3

Vektorfeltet $\vec{F}$ er definert i hele $\mathbf{R}^3$ ved:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{9}{2}y^2\,\vec{\imath} + (1-x^2-y^2)\,\vec{\jmath} + (1-x^2-y^2)\,\vec{k}\ .$$

(a) Beregn arbeidsintegralet $\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ når C_1 er det orienterte rette linjestykket fra $(0,0,0)$ til $(3,5,1)$.

(b) Beregn fluksintegralet $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ når S er den plane trekantede flaten med hjørner $(3,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,1)$, og $\vec{n}$ er oppoverrettet overalt på S (dvs. at $\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$).

(c) Finn divergensen, $\nabla\cdot\vec{F}$, og beregn trippelintegralet $\iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV$ når T er den delen av sylinderen $x^2+y^2 \leq 1$ som ligger mellom planene $z=0$ og $z=1$. Beregningen av dette trippelintegralet skal gjøres både direkte (uten bruk av Divergensteoremet) og med bruk av Divergensteoremet.

(d) Beregn arbeidsintegralet $\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ når C_2 er skjæringskurven for de to sylinderflatene gitt ved $x^2+y^2=1$ og $(y-1)^2+z^2=1$, orientert "mot urviserne" sett fra punktet $(0,5,0)$. (Hint: Prøv å unngå å bruke en metode som krever parametrisering av kurven C_2.)

Oppgave 4

En gitarstreng som har lengde $L=1$ og som beveger seg i hht. bølgelikningen $c^2u_{xx} = u_{tt}$ (verdien av c^2 er mindre viktig her), settes i svingninger ved at dens form i startøyeblikket ($t=0$) er gitt ved: $f(x) = \frac{1}{1000}\sin 2\pi x$ for $0 \leq x \leq 1$, mens $u(0,t)$, $u(1,t)$ og $u_t(x,0)$ alle er konstant lik 0. Hvordan beveger midtpunktet seg når denne strengen får svinge fritt?

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 3

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\;r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og “curl”:

$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$

$\mathrm{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z$, der $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$

$$\mathrm{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \;=\; \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \;=\; \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t) + aF(t) = 0$ er $F(t) = Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$ (der $a \neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

(2) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t) = (C_1 t + C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to komplekse røtter, $\alpha \pm \beta i$:
$F(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x + ct) + G(x - ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x, 0) = 0$ kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct)\ .$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0, L]$, da gjelder følgende for de $x \in [0, L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

og: $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$