

# EKSAMEN I MATEMATIKK 30 (REA3002)

22. MARS 2013 KL. 0900 – 1300

**Faglærer:** Hans Engenes

**Tillatte hjelpemidler:** Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.

Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.

Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

## Oppgave 1

Funksjonen  $f$  er definert i hele  $\mathbf{R}^3$  ved:  $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 3z^3 - 4xyz$ .

- (a) Finn en likning for nivåflaten til  $f$  gjennom punktet  $P : (3, 2, 1)$ .
- (b) Finn en likning for tangentplanet i punktet  $P : (3, 2, 1)$  til nivåflaten til  $f$  gjennom dette punktet.
- (c) Finn, ved lineær approksimasjon, en tilnærmet verdi for funksjonsverdiendringen  $\Delta f = f(3.1, 1.9, 1.1) - f(3, 2, 1)$ .

## Oppgave 2

I denne oppgaven skal trippelintegralet  $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dV$ , der legemet  $T$  i  $\mathbf{R}^3$  er den delen av sylinderen  $x^2 + y^2 \leq 9$  som ligger i 1. oktant i  $\mathbf{R}^3$  (dvs. der  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  og  $z \geq 0$ ) og mellom  $xy$ -planet og planet  $z = 3$ , først settes opp i kartesiske koordinater, sylinderkoordinater og kulekoordinater, og deretter regnes ut.

- (a) Sett opp trippelintegralet på iterert form (dvs. oppstilt form, med integrasjonsgrenser på alle nivåer), i kartesiske koordinater (dvs. med integrasjon m.h.p.  $x$ ,  $y$  og  $z$ , i en rekkefølge du selv velger).
- (b) Sett opp trippelintegralet på iterert form (dvs. oppstilt form, med integrasjonsgrenser på alle nivåer), i sylinderkoordinater (dvs. med integrasjon m.h.p.  $r$ ,  $\theta$  og  $z$ , i en rekkefølge du selv velger).
- (c) Sett opp trippelintegralet på iterert form (dvs. oppstilt form, med integrasjonsgrenser på alle nivåer), i kulekoordinater (dvs. med integrasjon m.h.p.  $\rho$ ,  $\phi$  og  $\theta$ , i en

rekkefølge du selv velger).

(d) Regn ut trippelintegralet.

### Oppgave 3

Vektorfeltet  $\vec{F}$  er definert i hele  $\mathbf{R}^3$  unntatt på sylinderflaten  $x^2 + y^2 = 3$ , ved:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{2xz}{(x^2 + y^2 - 3)^2} \vec{i} + \frac{2yz}{(x^2 + y^2 - 3)^2} \vec{j} - \frac{1}{x^2 + y^2 - 3} \vec{k}.$$

(a) Regn ut  $\text{curl}(\vec{F})$ .

(b) Finn verdien av arbeidsintegralet  $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  der  $C_1$  er sirkelen i  $xy$ -planet med sentrum i origo og radius 1, orientert "mot urviserne sett fra den positive delen av  $z$ -aksen".

(c) Finn verdien av arbeidsintegralet  $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  der  $C_2$  er sirkelen i  $xy$ -planet med sentrum i origo og radius 2, orientert "mot urviserne sett fra den positive delen av  $z$ -aksen".

### Oppgave 4

Finn, ved å gjennomføre metoden med separasjon av variable, den funksjonen  $u(x, t)$  ( $0 \leq x \leq 1$  og  $t \geq 0$ ) som oppfyller disse kravene:

- (1)  $u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$  for  $0 < x < 1$  og  $t > 0$ ,
- (2)  $u(0, t) = 0$  for  $t > 0$ ,
- (3)  $u(1, t) = 0$  for  $t > 0$ ,
- (4)  $u_t(x, 0) = 0$  for  $0 < x < 1$ , og
- (5)  $u(x, 0) = \frac{1}{1000} \sin 2\pi x$  for  $0 < x < 1$ .

## FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 30

### Koordinatskifte i multiple integraler:

**Dobbeltintegral, generelt:**  $\left. \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad \text{der} \quad J(u, v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

**Dobbeltintegral, polarkoordinater:**

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

**Trippelintegral, generelt:**  $\left. \begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

$$\text{der } J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

**Trippelintegral, sylinderkoordinater:**

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} \Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta$$

**Trippelintegral, kulekoordinater:**  $\left. \begin{array}{l} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

### Gradient, divergens og "curl":

$$\text{grad}(f) = \nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z, \quad \text{der } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{i} - (R_x - P_z)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

## To viktige setninger:

**Divergenssetningen (Gauss' setning):**  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_T \nabla \cdot \vec{F} \, dV$

dersom  $T$  er et begrenset legeme,  $S$  er overflaten til  $T$  og er stykkevis glatt,  $\vec{n}$  er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på  $S$  og  $\vec{F}$  er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele  $T$  og på hele  $S$ .

**Stokes' setning:**  $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$

dersom  $S$  er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate,  $\vec{n}$  er en orientering av  $S$ ,  $C$  er randkurven til  $S$  positivt orientert m.h.p.  $\vec{n}$ , og  $\vec{F}$  er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder  $S$ .

## Ordinære differensiallikninger:

### 1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av  $F'(t) + aF(t) = 0$  er  $F(t) = Ce^{-at}$ .

### 2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av  $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$  (der  $a \neq 0$ ) avhenger av  $a$ ,  $b$  og  $c$ , slik:

(1) Hvis  $ar^2 + br + c = 0$  har to forskjellige reelle røtter,  $r_1$  og  $r_2$ :

$$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

(2) Hvis  $ar^2 + br + c = 0$  har bare én (reell) rot,  $r$ :  $F(t) = (C_1 t + C_2) e^{rt}$ .

(3) Hvis  $ar^2 + br + c = 0$  har to komplekse røtter,  $\alpha \pm \beta i$ :

$$F(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

## Partielle differensiallikninger,

### d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$ :

Allmenn løsning kan skrives slik:  $F(x + ct) + G(x - ct)$ .

Løsninger som oppfyller randbetingelsen  $u_t(x, 0) = 0$  kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct).$$

## Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis  $f(x)$  er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på  $[0, L]$ , da gjelder følgende for de  $x \in [0, L]$  der  $f$  er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx,$$

$$\text{og: } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \text{ der } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \, dx.$$