HØGSKOLEN I GJØVIK

EKSAMEN I
MATEMATIKK 30 (REA3002)

21. DESEMBER 2012 KL. 0900 – 1300

Faglærer: Hans Engenes
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.
Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.
Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

(a) Forklar kort hvordan en kan sette opp en likning for tangentplanet i et punkt $P: (x_0, y_0, z_0)$ til nivåflaten gjennom P til en funksjon $w = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D_f$, når P er et indre punkt i D_f og f er kontinuerlig partiellderiverbar i og omkring P.

(b) Finn en likning for tangentplanet i punktet $(2, 1, 3)$ til nivåflaten gjennom dette punktet til funksjonen f gitt ved:

$$f(x, y, z) = 2xz - 3y^2 \ , \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ .$$

Oppgave 2

En parabolantenne har form som flaten S gitt ved

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \ , \quad x^2 + y^2 \leq 1 \ ,$$

og den er laget i et metall med konstant tetthet lik 10 (benevningen her kan være kg/m^2, og alle lengder kan vi oppfatte med benevningen m (meter), men oppgaven bør løses med ubenevnte tall).

(a) Finn parabolflatens masse, $m = \iint_S 10\, dS$, og z-verdien for dens tyngdepunkt, $\overline{z} = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{1}{m} \iint_S 10z\, dS$.

(b) Parabolantennen blir en dag stående ute i regnet, med åpningen rettet vertikalt opp, så den blir fylt med vann, som har tetthet 1000 [kg/m^3]. Finn den totale massen til parabolflaten med vann.

Oppgave 3

Likningen $z^2 = b^2-(r-a)^2$, her satt opp i sylinderkoordinater, der a og b er konstanter med $a \geq b$, beskriver en *torusflate* som dannes ved at en sirkel i xz-planet, med sentrum i $(a, 0, 0)$ og radius b, roteres en hel runde om z-aksen. Finn volumet av denne torusen.

Oppgave 4

Vektorfeltet $\vec{F}$ er definert i hele $\mathbf{R}^3$ ved: $\quad \vec{F}(x, y, z) = 2x\,\vec{\imath} + 6y\,\vec{\jmath} - 8z\,\vec{k}$.

(a) Finn ut om $\vec{F}$ er konservativt i $\mathbf{R}^3$.

(b) Beregn arbeidsintegralet $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ når C er det orienterte rette linjestykket fra $(1, 2, 0)$ til $(0, 1, 2)$.

(c) Beregn fluksintegralet $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}dS$ når S_1 er den plane flaten gitt ved: $x = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$, og $\vec{n}$ har positiv 1.komponent overalt på S_1.

(d) Beregn fluksintegralet $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}dS$ når S_2 er flaten gitt ved: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x \geq 1$, og $\vec{n}$ peker bort fra origo overalt på S_2.

Oppgave 5

En murvegg er 1 meter tykk, og temperaturen u inne i veggen avhenger bare av avstanden x fra veggens ene side og av tidspunktet t, regnet i sekunder ($t \geq 0$), slik at temperaturfunksjonen har to variable: $u(x, t)$ ($0 \leq x \leq 1$ og $t \geq 0$). På begge sider av veggen holdes temperaturen konstant lik 0 grader, slik at $u(0, t) = u(1, t) = 0$ for alle $t \geq 0$. I startøyeblikket $t = 0$ har veggen denne temperaturfunksjonen:

$$u(x, 0) = 20\sin\pi x\ , \qquad 0 \leq x \leq 1\ .$$

Vi regner veggen som fullstendig homogen, slik at $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ i hele området $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$, og at konstanten α^2 er lik $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ (benevning: m^2/s). Dette er en noenlunde riktig α^2-verdi for mur.

Finn temperaturfunksjonen $u(x, t)$ ved metoden med separasjon av variable, og regn ut hvor lang tid det tar før midt-temperaturen $u(\frac{1}{2}, t)$ er nede i 10 grader.

Gjennomføringen av separasjon av variable trenger ikke vises i alle detaljer, men nok til at det fremgår at metoden er kjent.

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 30

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\; r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og "curl":

$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$

$\mathrm{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$, der $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$

$$\mathrm{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \;=\; \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \;=\; \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t) + aF(t) = 0$ er $F(t) = Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$ (der $a \neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

(2) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t) = (C_1 t + C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to komplekse røtter, $\alpha \pm \beta i$:
$F(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x + ct) + G(x - ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x, 0) = 0$ kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct)\ .$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0, L]$, da gjelder følgende for de $x \in [0, L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx,$$

og: $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{der} \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx.$$