HØGSKOLEN I GJØVIK

EKSAMEN I MATEMATIKK 30 (REA3002)

26. MARS 2012 KL. 0900 – 1300

Faglærer: Hans Engenes
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.
Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.
Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

Funksjonen f er definert i hele xy-planet ved: $f(x,y) = \dfrac{x^2+2y^2+3}{x^2+4}$, P er punktet $(2,1)$, og C er nivåkurven til f gjennom P.

(a) Finn gradienten til f, $\nabla f(x,y)$, og finn den enhetsvektoren som peker i retningen for maksimal $f(x,y)$-stigning i P.

(b) Finn en likning for tangenten til kurven C i P.

(c) Finn, ved hjelp av linearisering, tilnærmet y-verdi for det punktet nær P på C som har $x = 2{,}001$.

Oppgave 2

Funksjonen f er definert på kvartsirkelen $D : x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, slik: $f(x,y) = xy$, og T er legemet avgrenset av grafen til f, bunnflaten D og en vertikal sidevegg.

(a) Grafen til f, sammen med bunnflaten D og en vertikal sidevegg, avgrenser et legeme T i rommet. Finn volumet av T.

(b) Finn arealet av grafen til f.

(c) Finn arealet av den vertikale sideveggen til legemet T.

Oppgave 3

Flaten gitt i kulekoordinater ved:

$$S: \quad \rho(\phi, \theta) = 2 + \cos\phi \ , \qquad 0 \le \phi \le \pi \ , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

er overflaten til et begrenset legeme T i rommet. Finn volumet av T.

Oppgave 4

Vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z)$ er definert i hele $\mathbf{R}^3$ ved: $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + x\vec{k}$, T er det sylindriske legemet gitt ved $x^2 + y^2 \le 3$, $0 \le z \le 1$, S er hele overflaten til T, og S_{bunn}, S_{topp} og S_{syl} er de tre delene av overflaten S (dvs. S_{bunn}=bunnflaten, der $z = 0$, S_{topp}=toppflaten, der $z = 1$, og S_{syl}=sylinderflaten, der $r = \sqrt{3}$).

(a) Finn fluksen $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ når $\vec{n}$ er den enhetsnormalvektoren på S som overalt peker ut fra T.

(b) Finn $\iint_{S_{\text{bunn}}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, $\iint_{S_{\text{topp}}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ og $\iint_{S_{\text{syl}}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, når $\vec{n}$ er som i (a).

(c) Finn $\iint_{S_{\text{topp}}} \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, når $\vec{n}$ er som i (a).

(d) Finn arbeidsintegralet $\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$ der C er randa til S_{topp}, orientert "mot urviserne" sett fra utsiktspunktet $(0, 0, 3)$.

Oppgave 5

Finn ut om bølgelikningen $u_{xx} = u_{tt}$ har noen produktløsning (dvs. $u(x, t) = X(x)T(t)$) på området $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$, som er ikketriviell (dvs. ikke konstant lik 0) og som er slik at $u(0, t) = u(\frac{1}{3}, t) = u(\frac{1}{2}, t) = u(1, t) = 0$ for alle $t \ge 0$.

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 30

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\;r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og "curl":

$\operatorname{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$

$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$, der $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$

$$\operatorname{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS \;=\; \iiint_T \nabla \cdot \vec{F}\, dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds \;=\; \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t) + aF(t) = 0$ er $F(t) = Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t) + bF'(t) + cF(t) = 0$ (der $a \neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

(2) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t) = (C_1 t + C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2 + br + c = 0$ har to komplekse røtter, $\alpha \pm \beta i$:
$F(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2 u_{xx} = u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x + ct) + G(x - ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x, 0) = 0$ kan skrives slik:

$$F(x + ct) + F(x - ct)\ .$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0, L]$, da gjelder følgende for de $x \in [0, L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx,$$

og: $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{der} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx.$$