HØGSKOLEN I GJØVIK

EKSAMEN I
MATEMATIKK 30 (REA3002)

5. DESEMBER 2011 KL. 0900 – 1300

Faglærer: Hans Engenes
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator og Haugans formelsamling.
Oppgavene er på **2 sider**, og en formelsamling på 2 sider følger med, så ialt 4 sider er utlevert.

Bruk penn eller blyant som gir gjennomslag. Ved innlevering skilles hvit og gul besvarelse, og de legges i hvert sitt omslag. Oppgavetekst, kladd og blå kopi beholdes av kandidaten. Husk kandidatnummer på alle ark.
Skriv besvarelsen slik at det er mulig å se hvorfor dine svar er slik de er. Resultater av utregninger skal skrives på eksakt form, hvis ikke annet er angitt i oppgaven.

Oppgave 1

Tenk deg at rommet, $\mathbf{R}^3$, er fylt av luft der temperaturen i ethvert punkt, (x, y, z), er gitt ved: $T(x, y, z) = 2x^2z + yz^2 - 3xy^2$, og at P er punktet $(2, 3, 4)$.

(a) Finn temperaturen i P, og finn en likning for den "konstant-temperatur-flaten" (nivåflaten for $T(x, y, z)$) som går gjennom P.

(b) Finn en likning for tangentplanet i P til den "konstant-temperatur-flaten" som går gjennom P.

(c) Finn en vektor som peker i retningen for raskest temperaturøkning for en som beveger seg gjennom punktet P.

Oppgave 2

Et fysisk legeme T med form som et tetraeder (det betyr at det er avgrenset av fire plane flater) er innplassert i $\mathbf{R}^3$ slik at de fire hjørner er i punktene $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 5)$, $(4, 0, 1)$ og $(4, 3, 2)$, og det har en tetthet δ som er proporsjonal med x, dvs. at $\delta = \delta(x, y, z) = kx$, der k er en konstant.

(a) Sett opp et trippelintegral som har verdi lik legemets masse, og skriv trippelintegralet om til iterert form (dvs. med en passende integrasjonsrekkefølge og med integrasjonsgrenser oppført på alle nivåer).

(b) Regn ut massen av legemet T, uttrykt ved konstanten k.

Oppgave 3

Den amerikanske delstaten Colorado er avgrenset av de to breddegradene 37°N ("grader nord", dvs. nord for ekvator) og 41°N og de to meridianene (lengdegradene) 102°03′V ("grader og bueminutter vest", dvs. vest for nullmeridianen som går gjennom Greenwich-observatoriet utenfor London) og 109°03′V. Ett bueminutt er $(1/60)°$, og $1°$ er lik $\frac{2\pi}{360}$ radianer. Jorda regnes her som en perfekt kule med radius 6371 km.

Finn arealet av Colorado. Svaret skal gis i kvadratkilometer, som et heltall eller på desimalform, med et antall desimaler som du mener er passende.

Oppgave 4

Vektorfeltet $\vec{F}$ er gitt i hele $\mathbf{R}^3$ ved: $\vec{F}(x, y, z) = z\,\vec{\imath} + x^2\vec{\jmath} + y\,\vec{k}$, og flaten S er gitt ved: $y = 2 - x^2 - z^2$, $x^2 + z^2 \leq 2$.

(a) Finn ut om feltet $\vec{F}$ er konservativt i $\mathbf{R}^3$.

(b) Sirkelen C i xz-planet med sentrum i origo og radius $\sqrt{2}$ er randa til flaten S. Beregn linjeintegralet (arbeidsintegralet)

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

der C er orientert "mot urviserne, sett fra den positive y-aksen", dvs. slik at $\vec{T} \cdot \vec{k} < 0$ i kurvepunktet $(\sqrt{2}\,, 0, 0)$.

(c) Beregn fluksintegralet

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

der $\vec{n}$ er den enhetsnormalvektoren på S som overalt har positiv 2.-komponent.

(d) Beregn fluksintegralet

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

der $\vec{n}$ er den enhetsnormalvektoren på S som overalt har positiv 2.-komponent.

Oppgave 5

En gitarstreng er festet til x-aksen i $x = 0$ og $x = 80$, og den settes i svingninger ved at den fram til tidspunktet $t = 0$ holdes i ro på en slik måte at den følger x-aksen mellom $x = 0$ og $x = 20$, så et rett linjestykke mellom $(20, 0)$ og $(30, \frac{1}{10})$, så et rett linjestykke mellom $(30, \frac{1}{10})$ og $(40, 0)$, og så x-aksen fra $x = 40$ til $x = 80$. Så, ved $t = 0$, slippes den løs (vel, endepunktene holdes fortsatt fast). Vi forutsetter at dens form $y = u(x, t)$ ved ethvert senere tidspunkt t er slik at $\frac{4}{25}u_{xx} = u_{tt}$.

Tegn skisser av strengens form, med målestokk på 2 mm pr. lengdeenhet langs x-retningen og 20 cm pr. lengdeenhet i y-retningen, ved $t = 0$, $t = 20$, $t = 50$, $t = 75$, $t = 100$ og $t = 200$.

FORMELSAMLING FOR BRUK VED EKSAMEN I MATEMATIKK 30

Koordinatskifte i multiple integraler:

Dobbeltintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv \quad \text{der} \quad J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u.$$

Dobbeltintegral, polarkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, generelt: $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

$$\text{der } J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

Trippelintegral, sylinderkoordinater:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\;r\,dz\,dr\,d\theta$$

Trippelintegral, kulekoordinater: $\left.\begin{array}{l} x = \rho\,\sin\phi\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\phi\,\sin\theta \\ z = \rho\,\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(\rho\,\sin\phi\,\cos\theta, \rho\,\sin\phi\,\sin\theta, \rho\,\cos\phi)\;\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Gradient, divergens og "curl":

$\mathrm{grad}(f) = \nabla f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k}$

$\mathrm{div}(\vec{F}) = \nabla\cdot\vec{F} = P_x + Q_y + R_z$, der $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$

$$\mathrm{curl}(\vec{F}) = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z)\vec{\imath} - (R_x - P_z)\vec{\jmath} + (Q_x - P_y)\vec{k}$$

To viktige setninger:

Divergenssetningen (Gauss' setning): $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS \;=\; \iiint_T \nabla\cdot\vec{F}\,dV$

dersom T er et begrenset legeme, S er overflaten til T og er stykkevis glatt, $\vec{n}$ er den overalt utadrettede enhetsnormalvektor på S og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i hele T og på hele S.

Stokes' setning: $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds \;=\; \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$

dersom S er en lukket, begrenset og stykkevis glatt flate, $\vec{n}$ er en orientering av S, C er randkurven til S positivt orientert m.h.p. $\vec{n}$, og $\vec{F}$ er et vektorfelt hvis komponenter er definert og kontinuerlig deriverbare i en åpen del av rommet som inneholder S.

Ordinære differensiallikninger:

1.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $F'(t)+aF(t)=0$ er $F(t)=Ce^{-at}$.

2.-ordens lineære, homogene, med konstante koeffisienter:

Allmenn løsning av $aF''(t)+bF'(t)+cF(t)=0$ (der $a\neq 0$) avhenger av a, b og c, slik:

(1) Hvis $ar^2+br+c=0$ har to forskjellige reelle røtter, r_1 og r_2:
$F(t)=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$.

(2) Hvis $ar^2+br+c=0$ har bare én (reell) rot, r: $F(t)=(C_1t+C_2)e^{rt}$.

(3) Hvis $ar^2+br+c=0$ har to komplekse røtter, $\alpha\pm\beta i$:
$F(t)=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$.

Partielle differensiallikninger,
d'Alemberts løsning av bølgelikningen $c^2u_{xx}=u_{tt}$:

Allmenn løsning kan skrives slik: $F(x+ct)+G(x-ct)$.

Løsninger som oppfyller randbetingelsen $u_t(x,0)=0$ kan skrives slik:

$$F(x+ct)+F(x-ct)\;.$$

Fourierrekker, halvperiodiske utvidelser:

Hvis $f(x)$ er definert og stykkevis kontinuerlig og begrenset på $[0,L]$, da gjelder følgende for de $x\in[0,L]$ der f er kontinuerlig:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad \text{der}$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx\quad\text{og}\quad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx,$$

og: $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad\text{der}\quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx.$$